به نام او

امتحان اول درس ریاضی مهندسی (۹۱/۱/۲۴) وقت امتحان: $۲\frac{۱}{۲}$ ساعت

---

۱. سری فوریه تابع $f(x) = |\sin x|$ را بنویسید. به کمک آن مقدار سریهای عددی زیر را محاسبه نمایید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$$

۲. الف- تبدیل فوریه کسینوسی تابع زیر را محاسبه نمایید.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

ب- به کمک قسمت قبل رابطه زیر را اثبات کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi\omega}{2}) \cos(\omega x)}{1 - \omega^2} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |x| \end{cases}$$

۳. یک جواب صوری برای معادله دیفرانسیل زیر برحسب تابع f پیدا کنید. نشان دهید شرط وجود جواب عبارتست از :

$$\int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin(3\theta) \, d\theta = 0$$

(**راهنمایی:** $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$)

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{9u}{r^2} = 0, & r < 1 \\ u(1, \theta) = f(\theta), & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

۴. یک جواب صوری برای معادله ناهمگن زیر پیدا کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin \pi x & 0 < x < 1, 0 < t \\ u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 2 \\ u(x, 0) = x + 1, \quad u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

۵. ابتدا به طور دقیق توضیح دهید که برای پیدا کردن جواب صوری معادله زیر از کدام یک از تبدیلات انتگرالی (فوریه، کسینوسی، سینوسی، لاپلاس) می‌توان استفاده کرد. سپس به کمک یکی از این تبدیلات یک جواب ارائه کنید.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = te^{-x}, & x, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$