به نام او

امتحان پایان ترم درس توابع مختلط وقت امتحان: ۳ ساعت ۹۳/۳/۲۲

---

۱. فرض کنید ناحیه Ω یک مجموعه باز باشد که شامل بستار دیسک D_R است. همچنین تابع هلومورف f روی دایره C_R مخالف صفر است و $f(0) \neq 0$. اگر $z_1, \cdots, z_N$ ریشه‌های تابع f با احتساب تکرر درون دیسک D_R باشد، آنگاه رابطه زیر را اثبات کنید:

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{N} \log(\frac{|z_k|}{R}) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta$$

۲. اگر تابع $f : U \longrightarrow V$ هلومورف و یک به یک باشد، ثابت کنید $f'(z) \neq 0$ برای هر $z \in U$ و وارون تابع f نیز یک تابع هلومورف است.

۳. فرض کنید $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ نگاشت هلومورف باشد که $f(0) = 0$ و $\mathbb{D}$ دیسک واحد به مرکز مبدأ است. ثابت کنید $|f(z)| \leq |z|$ برای هر $z \in \mathbb{D}$ و اگر تساوی برای نقطه‌ای به غیر از مبدأ اتفاق بیافتد آنگاه تابع f یک دوران است.

۴. اگر Ω ناحیه باز و همبند باشد و $\{f_n\}$ دنباله توابع هلومورف و یک به یک روی Ω که روی زیرمجموعه‌های فشرده به طور یکنواخت به تابع f همگرا است. نشان دهید f یک به یک یا تابع ثابت است.

۵. رابطه زیر را اثبات کنید:

$$e^z - 1 = e^{z/2} z \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z^2}{4n^2\pi^2}).$$

۶. ثابت کنید هر تابع تام و یک به یک به صورت $f(z) = az + b$ است.

۷. الف- یک نگاشت همدیس از ناحیه زیر به نیم صفحه بیابید.

$$\{z : |z| < 1,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{6}\}$$

ب- یک جواب برای معادله $\Delta u = 0$ در این ناحیه پیدا کنید که در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند.

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}|_{\theta=0} = 0,\ u|_{r=1} = 1,\ u|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 0$$

موفق باشید.