به نام او

امتحان پایان ترم درس آنالیز ریاضی ۱ وقت امتحان: **۳** ساعت ۹۴/۳/۱۶

---

۱. اگر $a_n > 0$ نشان دهید $\sum a_n$ همگرا است اگر و تنها اگر $\prod(1 + a_n)$ همگرا باشد.

۲. فاصله هر نقطه p از فضای متریک M تا زیرمجموعه S از آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{dist}(p, S) = \inf\{d(p, x) : x \in S\}$$

الف- نشان دهید p یک نقطه حدی S است اگر و تنها اگر $\operatorname{dist}(p, S) = 0$.

ب- ثابت کنید تابع $p \mapsto \operatorname{dist}(p, S)$ پیوسته یکنواخت است.

۳. نشان دهید اگر تابعی ریمان انتگرال‌پذیر باشد، نقاط ناپیوستگی آن اندازه صفر است.

۴. شرایط جابجایی حد و مشتق را در دنباله‌ها به طور دقیق بیان کرده و اثبات نمایید. با یک مثال نشان دهید در حالت کلی ممکن است حد یکنواخت توابع مشتق‌پذیر، مشتق‌پذیر نباشد.

۵. فرض کنید $f(x)$ یک تابع مشتق‌پذیر روی $[0, 1]$ باشد که $|f'(x)| \leq M$ برای هر x، ثابت کنید

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) - \int_0^1 f(x)\,dx\Big| \leq \frac{M}{2n}$$

۶. الف- f_n و f توابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ هستند که برای هر دنباله همگرای $x_n \to x$ داریم: $f_n(x_n) \to f(x)$. ثابت کنید f پیوسته است.

ب- اگر f_nها پیوسته بوده و $f_n \to f$ به طور یکنواخت، آنگاه شرط قسمت (الف) برقرار است.

۷. فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله دلخواه از اعداد حقیقی ناصفر باشد، ثابت کنید دنباله توابع زیر یک زیردنباله همگرا نقطه‌وار به یک تابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ دارد.

$$f_n(x) = \frac{1}{a_n}\sin(a_n x) + \cos(x + a_n)$$

موفق باشید.