۱) همگرایی یا واگرایی سریهای زیر را بررسی کنید:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2}$

(b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

(c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \ldots$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\log n)^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(\log n)}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$

۲) فرض کنید $a_n \geq 0$ و $\sum a_n$ همگراست، نشان دهید $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ نیز همگراست.

۳) فرض کنید $\sum a_n$ هگراست، اگر $\{b_n\}$ دنباله‌ای یکنوا و کراندار باشد ثابت کنید سری $\sum a_n b_n$ همگراست.

۴) فرض کنید سری $\sum a_n$ واگرا باشد، ثابت کنید $\sum n a_n$ نیز واگراست.

۵) فرض کنید $a_n > 0$ برای هر $n$ و سری $\sum a_n$ همگرا باشد، نشان دهید سری $\sum (a_n a_{n+1})^{1/2}$ نیز همگراست.
نشان دهید عکس این مطلب در حالتیکه $\{a_n\}$ یکنوا باشد نیز درست است.

۶) فرض کنید $S = \{n_1, n_2, \ldots\}$ مجموعه اعداد صحیح مثبتی باشد که در نمایش اعشاری آنها رقم صفر وجود ندارد( مثلاً $5 \in S$ ولی $101 \notin S$ )، نشان دهید سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ همگراست و مجموع آن از ۹۰ کوچکتر است.

۷) فرض کنید $a_n > 0$ و $\sum a_n$ همگراست، قرار دهید $s_n = a_1 + \ldots + a_n$،

(a) نشان دهید سری $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ واگراست.

(b) ثابت کنید

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \ldots + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geq 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}$$

ونتجه بگیرید $\sum \frac{a_n}{s_n}$ واگراست.

(c) ثابت کنید

$$\frac{a_n}{{s_n}^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$$

و نتیجه بگیرید $\sum \frac{a_n}{{s_n}^2}$ همگراست.

(d) درمورد سریهای $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$ و $\sum \frac{a_n}{1+n^2a_n}$ چه می‌توان گفت؟

۸) فرض کنید $a_n > 0$ و $\sum a_n$ همگراست، قرار دهید $r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m$،

(a) نشان دهید برای $m < n$ داریم:

$$\frac{a_m}{r_m} + ... + \frac{a_n}{r_n} \geq 1 - \frac{r_n}{r_m}$$

ونتیجه بگیرید $\sum \frac{a_n}{r_n}$ واگراست.

(b) ثابت کنید

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} \leq 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$$

و نتیجه بگیرید $\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ همگراست.

۹) فرض کنید $a_0, a_1, ...$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است به‌طوریکه ${}^2$ $a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ برای $n = 0, 1, 2, ...$.
ثابت کنید اگر $\sum a_n$ همگرا باشد دراین‌صورت $a_k = 0$ برای هر $k$.

۱۰) فرم دیگری از تست مقایسه را ثابت کنید: فرض کنید $a_n, b_n > 0$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$، دراین‌صورت $\sum a_n$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum b_n$ همگرا باشد.

۱۱) فرض کنید $\sum a_n$ همگرای مطلق است، اگر $\{b_n\}$ زیر دنباله‌ای از $\{a_n\}$ باشد، ثابت کنید $\sum b_n$ نیز همگرای مطلق است.
نشان دهید اگر $\sum a_n$ همگرای مطلق نباشد حکم فوق درست نیست.

۱۲) ثابت کنید اگر $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد دراین‌صورت $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

۱۳) ثابت کنید سری $\sum a_n$ همگرای مطلق است اگر و تنها اگر سری‌ایکه توسط جملات مثبت و سری‌ایکه توسط جملات منفی $\sum a_n$ ساخته می‌شود هردو همگرا باشند.

۱۴) قضیه زیر در کلاس ثابت شده است:

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد و $\{b_n\}$ باز آرایشی از $\{a_n\}$ باشد $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نیز همگراست و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ برای اثبات از شرط کوشی استفاده می‌شد، این تمرین اثبات دیگری را برای قضیه فوق بدون استفاده از شرط کوشی ارائه می‌دهد:

(a) فرض کنید $a_n \geq 0$ برای هر$n$، قرار دهید $s_n = a_1 + ... + a_n$ و $t_n = b_1 + ... + b_n$، نشان دهید برای هر $n$، $m$ موجود است به‌طوریکه $s_n \leq t_m$.

(b) نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(c) نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(d) حالا با استفاده از تمرین قبل شرط $a_n \geq 0$ را حذف کنید.