به‌نام او

۱) همگرایی‌های زیر را ثابت کنید:

(a) برای $\alpha > 0$ داریم: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(d) برای $a > 0$ و $\alpha \in R$ داریم: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+a)^n} = 0$.

(e) اگر $|a| < 1$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

۲) اگر $a_1 = \sqrt{2}$ و $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}$ برای $n = 1, 2, \ldots$، ثابت کنید a_n همگراست و $a_n < 2$ برای هر n.

۳) نشان دهید:

(a) اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ از پایین کراندار باشند:

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

(b) اگر $a_n > 0$، $b_n > 0$، $\limsup a_n$ و $\limsup b_n$ هردو متناهی یا هردو نامتناهی باشند:

$$\limsup(a_n b_n) \leq (\limsup a_n)(\limsup b_n)$$

۴) نشان دهید اگر $a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n \to 0$ آنگاه $a_n \to 0$.

۵) فرض کنید برای دنباله a_n داریم: $a_n - a_{n-2} \to 0$، ثابت کنید $\frac{a_n}{n} \to 0$.

٦) فرض کنید برای دنباله a_n از اعداد مثبت و هر $m, n \in N$ داریم:

$$(1 + a_{m+n}) \leq (1 + a_m)(1 + a_n)$$

ثابت کنید دنباله $x_n = \sqrt[n]{1 + a_n}$ همگراست.

۷) اگر $a_n > 0$، ثابت کنید:

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

۸) با استفاده از تمرین قبل ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

۹) برای دنباله $\{a_n\}$ قرار دهید: $\sigma = \frac{a_1+\dots+a_n}{n}$، نشان دهید:

(a) $\liminf a_n \le \liminf \sigma_n \le \limsup \sigma_n \le \limsup a_n$

نتیجه بگیرید اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ آنگاه σ_n نیز همگراست و $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = L$.

(b) دنباله $\{a_n\}$ را طوری بسازید که $\{a_n\}$ همگرا نباشد اما $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

(c) آیا ممکن است که $a_n > 0$ برای هر n، $\limsup a_n = \infty$ و $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$؟

(d) تحت شرایطی عکس (a) نیز برقرار است؛ به عنوان نمونه ثابت کنید: اگر $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k(a_k - a_{k-1}) \to 0$ و $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = L$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. (راهنمایی: $a_n - \sigma_n$ را در نظر بگیرید).

(e) تحت شرایط ضعیفتری نیز عکس (a) برقرار است: قرار دهید $x_n = a_n - a_{n-1}$، فرض کنید $M < \infty$ موجود است که $\forall n : |nx_n| \le M$ و $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = L$، نشان دهید $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. (راهنمایی: برای $m < n$ داریم:

$$a_n - \sigma_n = \frac{m}{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) + \frac{1}{n-m}\sum_{i=m+1}^{n}(a_n - a_i)$$

برای این iها داریم: $|a_n - a_i| \le \frac{(n-i)M}{i+1} \le \frac{(n-m-1)M}{m+2}$ $\epsilon > 0$ را تثبیت کنید و برای هر n، m را طوری درنظر بگیرید که $m \le \frac{n-\epsilon}{1+\epsilon} \le m+1$).

۱۰) نشان دهید هر دنباله در R یک زیر دنباله یکنوا دارد.

نتیجه بگیرید هر دنباله کراندار در R یک زیر دنباله همگرا دارد.

۱۱) فرض کنید a_n دنباله‌ای از اعداد مثبت است، نشان دهید: $\limsup_{n\to\infty} n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1) \ge 1$، ثابت کنید در نامساوی فوق به‌جای ۱، نمی‌توان عدد بزرگتری را جایگزین کرد.

۱۲) برای دنباله a_n از اعداد مثبت،

(a) نشان دهید: $\limsup_{n\to\infty}(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n})^n \ge e$،

(b) برای هر عدد $a \ge e$ دنباله a_n از اعداد مثبت را طوری بیابید که $\limsup_{n\to\infty}(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n})^n = a$،

۱۳) فرض کنید a_n دنباله‌ای از اعداد حقیقی است به‌طوریکه $a_{n+1} - a_n \to 0$. نشان دهید مجموعه حدهای زیر دنباله‌های همگرای a_n یک بازه است با نقاط ابتدایی و انتهایی $\liminf a_n$ و $\limsup a_n$.

۱۴) فرض کنید a_n دنباله‌ای از اعداد حقیقی است به‌طوریکه $a_{n+1} + a_n \to 0$. نشان دهید مجموعه حدهای زیر دنباله‌های همگرای a_n یا نامتناهی است و یا حداکثر از دو نقطه تشکیل شده است.