به‌نام او

در تمامی این سوالات M و N فضاهای متریک هستند.

۱) مستقیماً با استفاده از تعریف ثابت کنید $(0,1)$ زیر مجموعه‌ای باز از R است ولی در R^2 باز نیست (R را محور x ها در R^2 درنظر گرفته‌ایم).

۲) برای چه بازه‌های $[a,b]$ در R، $[a,b]\cap Q$ به عنوان زیر مجموعه‌ای از فضای متریک Q هم باز است هم بسته؟

۳) فرض کنید M یک فضای متریک است، مستقیماً بااستفاده از تعریف نشان دهید هر تک نقطه‌ای در M بسته است. نتیجه بگیرید هر مجموعه متناهی نیز در M بسته است.

۴) ثابت کنید $U \subset M$ باز است اگر و تنها اگر هیچیک از نقاط U نقطه حدی U^c نباشد.

۵) M یک فضای متریک است و A, B زیر مجموعه‌هایی از M هستند، اگر $A \subset B$، نشان دهید:

(a) $\overline{A} \subset \overline{B}$

(b) $int(A) \subset int(B)$

۶) فضای متریک M را با متریک گسسته در نظر بگیرید.

(a) نشان دهید هر زیر مجموعه M هم باز است هم بسته.

(b) ثابت کنید هر تابع $f: M \to N$ (N یک فضای متریک دلخواه است) پیوسته است.

(c) چه دنباله‌هایی در M همگرا هستند؟

۷) فاصله $p \in M$ از مجموعه ناتهی $A \subset M$ به این صورت تعریف می‌شود: $d(p,A) = inf\{d(p,a) : a \in A\}$

(a) نشان دهید p نقطه حدی A است اگروتنها اگر $d(p,A) = 0$.

(b) نشان دهید تابع $p \mapsto d(p,A)$ به طور یکنواخت پیوسته است.

۸) ثابت کنید $A \subset M$ هیچ‌جا چگال است اگروتنها اگر A^c درونْ تهی باشد.

۹) فرض کنید $N \subset M$ باز است،

(a) نشان دهید A در N باز است اگروتنها اگر در M باز باشد.

(b) برعکس اگر باز بودن $A \subset N$ در N معادل با باز بودن A در M باشد، ثابت کنید N در M باز است.

(c) مطالب فوق را برای بسته بودن ثابت کنید.

(d) فرض کنید مفاهیم باز و بسته بودن در $N \subset M$ و M دقیقاً معادل یکدیگرند، نتیجه بگیرید N در M هم باز است هم بسته.

۱۰) نگاشت $f: M \to N$ را باز می‌گوییم هرگاه برای هر مجموعه باز $U \subset M$، $f(U)$ در N باز باشد.

(a) اگر f باز باشد آیا پیوسته هم است؟

(b) اگر f همیومورفیسم باشد آیا باز است؟

(c) اگر f نگاشتی باز، پیوسته و دوسویی باشد آیا یک همیومورفیسم است؟

(d) اگر $f : R \to R$ پوشا و پیوسته باشد می‌توان نتیجه گرفت که باز هم است؟

(e) اگر $f : R \to R$ پوشا، پیوسته و باز باشد می‌توان نتیجه گرفت که یک همیومورفیسم است؟

(f) اگر در (e) به جای R دایره واحد S^1 را در نظر بگیریم، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۱۱) فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای نزولی از زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی فضای متریک کامل M باشد، اگر وقتی $n \to \infty$، $diam A_n \to 0$ نشان دهید $\cap A_n$ دقیقاً از یک نقطه تشکیل شده است.

۱۲) تمام نقاط انباشتگی (تجمع) مجموعه‌های زیر در R را مشخص نمایید و در هر مورد تعیین کنید که مجموعه باز است یا بسته یا هیچکدام.

(a) همه اعداد صحیح

(b) بازه $]a, b]$

(c) همه اعداد به شکل $\frac{1}{n}$

(d)همه اعداد گویا

(e) همه اعداد به شکل $\frac{1}{5^n} + \frac{1}{2^n}$

(f)همه اعداد به شکل $(-1)^n + \frac{1}{m}$

(g) همه اعداد به شکل $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

۱۳) ثابت کنید هر مجموعه بسته در R را می‌توان به‌صورت اشتراکی شمارا از مجموعه‌های باز نوشت.

۱۴) ثابت کنید یک مجموعه بسته، کراندار و ناتهی A در R یا بازه‌ای است بسته، یا A را می‌توان از بازه‌ای بسته با حذف دسته‌ای از هم جدا و شمارا از بازه‌های باز که نقاط انتهایی آنها متعلق به A می‌باشد، به‌دست آورد.

۱۵) فرض کنید F دسته‌ای از مجموعه‌ها در R^n باشد، قرار دهید:

$$S = \cup_{A \in F}, T = \cap_{A \in F}$$

برای هر یک از گزاره‌های زیر یا برهانی ارائه دهید و یا مثال نقضی بیان کنید.

(a) اگر p یک نقطه انباشتگی T باشد، آنگاه p یک نقطه انباشتگی هر یک از مجموعه‌های A در F است.

(b) اگر p یک نقطه انباشتگی S باشد، آنگاه p یک نقطه انباشتگی هر یک از مجموعه‌های A حداقل یک مجموعه مانند A در F خواهد بود.

۱۶) نگاشت دوسویی $f : M \to N$ را یک ایزومتری می‌گوییم هرگاه برای هر $p, q \in M$ داشته‌باشیم $d_N(f(p), f(q)) = d_M(p, q)$. می‌گوییم M با N ایزومتر است و می‌نویسیم $M \equiv N$ هرگاه یک ایزومتری بین M و N موجود باشد.

(a) ثابت کنید هر ایزومتری پیوسته است.

(b) ثابت کنید هر ایزومتری یک همیومورفیسم است.

(c) ثابت کنید $[0, 1]$ با $[0, 2]$ ایزومتر نیست.