برای تابع $f:[a,b]\to R$ می‌نویسیم $f\in R[a,b]$ هرگاه f روی $[a,b]$ انتگرال پذیر ریمان باشد.

۱) ثابت کنید بازه $[0,1]$ اندازه صفر نیست.

۲) فرض کنید تابع $\varphi:[a,b]\to R$ به طور پیوسته مشتق پذیر است. x را یک نقطه بحرانی φ می‌گویند هرگاه $\varphi'(x)=0$. همچنین y را یک مقدار بحرانی می‌نامند اگر برای یک نقطه بحرانی x داشته باشیم $y=\varphi(x)$.

(a) ثابت کنید مجموعه مقدارهای بحرانی φ اندازه صفر است.

(b) تعمیم حکم فوق را برای توابع به طور پیوسته مشتق پذیر از R به R ثابت کنید.

۳) آیا χ_Q (تابع مشخصه Q) روی $[0,1]$ انتگرال پذیر ریمان است؟

۴) فرض کنید $f,g\in R[a,b]$ و $f(x)<g(x)$ برای هر $x\in[a,b]$، ثابت کنید $\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$.

۵) برای توابع $f,g:[a,b]\to R$ گزاره های زیر را ثابت کنید و یا مثال نقض بیاورید:

(a) اگر $f\in R[a,b]$ در اینصورت $|f|\in R[a,b]$.

(b) اگر $|f|\in R[a,b]$ در اینصورت $f\in R[a,b]$.

(c) اگر $f\in R[a,b]$ و $|f(x)|\geq c>0$ برای هر x، در اینصورت $\frac{1}{f}\in R[a,b]$.

(d) اگر $f^2\in R[a,b]$ در اینصورت $f\in R[a,b]$.

(e) اگر $f^2\in R[a,b]$ و $f(x)\geq 0$ برای هر x، در اینصورت $f\in R[a,b]$.

(f) اگر $f,g\in R[a,b]$ و برای هر x داشته باشیم $f(x)\geq m>0$، آنگاه $h(x)=f(x)^{g(x)}\in R[a,b]$.

٦) (a) فرض کنید $g\in R[a,b]$ و $m\leq g(x)\leq M$ برای هر x، اگر f بر بازه $[m,M]$ پیوسته باشد نشان دهید $h(x)=f\circ g(x)\in R[a,b]$.

(b) در قسمت قبل اگر فقط شرط انتگرال پذیری f را داشته باشیم حکم فوق لزوماً برقرار نمی‌باشد: توابع $f,g:[0,1]\to R$ را اینطور تعریف کنید:

$f(0)=0$، برای x گنگ $f(x)=0$ و اگر x گویا و به صورت $\frac{m}{n}$ باشد که m و n نسبت به هم اولند در اینصورت $f(x)=\frac{1}{n}$. همچنین $g(0)=0$ و $g(x)=1$ برای $0<x\leq 1$.

۷) فرض کنید تابع مثبت f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $M=\max f$، نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=M$$

۸) فرض کنید $f,g\in R[a,b]$ و $f(x)=g(x)$ به جز روی مجموعه‌کانتور استاندارد C.

(a) ثابت کنید f و g انتگرالهای برابر دارند.

(b) اگر $f(x) = g(x)$ به جز روی Q، آیا حکم فوق برقرار است؟

(c) چگونه حکم فوق با این مطلب که تابع مشخصه Q انتگرال پذیر ریمان نیست در ارتباط است؟

۹) برای تابع $f \in R[a,b]$ تعریف کنید:

$$\|f\|_{۲} = \{\int_a^b |f(x)|^{۲} dx\}^{\frac{۱}{۲}}$$

(a) اگر $f, g \in R[a,b]$، نامساوی هولدر را ثابت کنید:

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \|f\|_{۲}\|g\|_{۲}$$

(b) نتیجه بگیرید برای توابع $f, g, h \in R[a,b]$ نامساوی مثلث برقرار است:

$$\|f-h\|_{۲} \leq \|f-g\|_{۲} + \|g-h\|_{۲}$$

بنابراین $\|.\|$ یک نرم روی $R[a,b]$ تعریف می‌کند.

۱۰) فرض کنید $f : [a,b] \to R$ به طور پیوسته مشتق پذیر است و $f(a) = f(b) = ۰$، همچنین

$$\int_a^b |f(x)|^{۲} dx = ۱$$

ثابت کنید

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{۱}{۲}$$

و

$$\int_a^b |f'(x)|^{۲}dx . \int_a^b x^{۲}|f(x)|^{۲}dx > \frac{۱}{۴}$$

۱۱) فرض کنید $f \in R[a,b]$، نشان دهید برای $\epsilon > ۰$ دلخواه تابع پیوسته $g : [۰,۱] \to R$ موجود است به طوریکه $\|f-g\|_{۲} < \epsilon$. راهنمایی: فرض کنید $P = \{x_{۰}, x_{۱}, ..., x_n\}$ افراز مناسبی برای $[a,b]$ باشد، تعریف کنید:

$$g(t) = \frac{x_i - t}{\Delta x_i} f(x_{i-۱}) + \frac{t - x_{i-۱}}{\Delta x_i} f(x_i)$$

برای $x_{i-۱} \leq t \leq x_i$.

۱۲) تعریف کنید $f(x) = \int_x^{x+۱} \sin(t^{۲})dt$.

(a) نشان دهید برای $x > ۰$ داریم $|f(x)| < \frac{۱}{x}$. راهنمایی: قرار دهید $u = t^{۲}$.

(b) ثابت کنید

$$۲xf(x) = \cos(x^{۲}) - \cos((x+۱)^{۲}) + r(x)$$

که $|r(x)| < \frac{c}{x}$ و c یک ثابت است.

(c) حدود بالا و پایین $xf(x)$ را وقتی $x \to \infty$ به دست آورید.

(d) آیا $\int_{۰}^{\infty} \sin(t^{۲})dt$ همگراست؟