۱) فرض کنید $f_n : [a,b] \to R$ برای هر $n \in N$ پیوسته یکنواخت باشد و $f_n \rightrightarrows f$، آیا می‌توان نتیجه گرفت که f پیوسته یکنواخت است؟

۲) برای $n = ۰, ۱, ۲, ...$ و $x \in R$ تعریف کنید:

$$f_n(x) = \frac{x}{۱ + nx^۲}$$

نشان دهید $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به تابعی مانند f همگراست و برای $x \neq ۰$ داریم

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

ولی برای $x = ۰$ رابطه فوق برقرار نمی‌باشد.

۳) اگر $f : R \to R$ پیوسته باشد و دنباله $f_n(x) = f(nx)$ هم پیوسته باشد، چه نتیجه‌ای می‌توان در مورد f گرفت؟

۴) فرض کنید $f_n : [۰, ۱] \to R$ دنباله‌ای از توابع انتگرال پذیر ریمان باشد و $|f_n(x)| \leq ۱$ برای هر n و x. تعریف کنید:

$$F_n(x) = \int_۰^x f_n(t)dt$$

ثابت کنید زیر دنباله‌ای از $\{F_n\}$ به طور یکنواخت همگراست.

۵) فرض کنید $f_n : [۰, ۱] \to R$ دنباله‌ای از توابع پیوسته باشد به طوریکه

$$\int_۰^۱ (f_n(t))^۲ dt \leq ۵$$

برای هر $R.n$ $g_n : [۰, ۱] \to$ را به این صورت تعریف کنید:

$$g_n(x) = \int_۰^۱ f_n(t)\sqrt{x+t}dt$$

(a) ثابت $K \geq ۰$ را طوری بیابید که $|g_n(x)| \leq K$ برای هر n.

(b) ثابت کنید زیر دنباله‌ای از $\{g_n\}$ به طور یکنواخت همگراست.

۶) فرض کنید (f_n) یک دنباله هم پیوسته در $C^\circ([a.b], R)$ (فضای توابع پیوسته از $[a,b]$ به R) باشد و $p \in [a,b]$ داده شده باشد.

(a) اگر $\{f_n(p)\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد، ثابت کنید (f_n) به طور یکنواخت کراندار است.

(b) حکم قضیه آرزلا—آسکولی را با یک شرط ضعیفتر همگرایی نتیجه بگیرید.

(c) آیا می‌توان $[a,b]$ را با (a,b) جایگزین کرد؟ با Q؟ R؟ N؟

۷) فرض کنید $f:[۰,۱]\to R$ پیوسته است و $\int_۰^۱ x^n f(x)dx=۰$ برای $n=۰,۱,۲,\ldots$. ثابت کنید $f\equiv ۰$.

راهنمایی: انتگرال حاصلضرب f در هر چند جمله‌ای برابر صفر است، حالا از قضیه وایرشتراس استفاده کنید و نتیجه بگیرید $\int_۰^۱ f^۲(x)dx=۰$.

۸) تعریف کنید: $f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۱+n^۲x}$.

(a) برای چه x هایی سری فوق به طور مطلق همگراست؟

(b) روی چه بازه‌هایی سری به طور یکنواخت همگراست؟

(c) روی چه بازه‌هایی سری به طور یکنواخت همگرا نیست؟

(d) آیا f در هر جایی که سری همگرا باشد پیوسته است؟

(e) آیا f کراندار است؟

۹) فرض کنید $f:[۰,۱]\to R$ به طور پیوسته مشتق پذیر است و $f(۰)=۰$. ثابت کنید

$$\|f\|^۲\leq\int_۰^۱(f'(x))^۲dx$$

که در آن $\|f\|=\sup\{|f(t)|:۰\leq t\leq ۱\}$.

۱۰) فرض کنید $E\subset C^۰$ هم پیوسته و کراندار باشد.

(a) ثابت کنید تابع $x\mapsto\sup\{f(x):f\in E\}$ پیوسته است.

(b) نشان دهید اگر شرط هم پیوستگی را حذف کنیم (a) لزوماً برقرار نیست.

(c) فرض کنید تابع $x\mapsto\sup\{f(x):f\in F\}$ برای هر زیرمجموعه $F\subset E$ پیوسته باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که E هم پیوسته است؟

۱۱) فضای متریک M را همبند زنجیری می‌نامند اگر برای هر $\epsilon>۰$ و هر $p,q\in M$ زنجیر $p=p_۰\ldots p_n=q$ در M موجود باشد به‌طوریکه

$$d(p_{k-۱},p_k)<\epsilon,\qquad\qquad \forall ۱\leq k\leq n$$

خانواده F از توابع $f:M\to R$ را در نقطه $p\in M$ کراندار می‌گویند اگر مجموعه $\{f(p):f\in M\}$ در R کراندار باشد. نشان دهید M همبند زنجیری است اگر و تنها اگر برای هر خانواده هم پیوسته F که در یک نقطه از M کراندار باشد بتوان نتیجه گرفت که F در هر نقطه از M کراندار است.

۱۲) روش دیگری برای متمم سازی:

فرض کنید (M,d) یک فضای متریک است. $p\in M$ را تثبیت کنید و برای هر $q\in M$ تابع f_q را اینطور تعریف کنید: $f_q(x)=d(q,x)-d(p,x)$.

(a) نشان دهید f_q پیوسته و کراندار است و نگاشت $q\mapsto f_q$ یک ایزومتری بین M و زیرمجموعه $M_۰$ از $C^۰(M,R)$ می‌باشد.

(b) با توجه به اینکه $C^۰(M,R)$ تام است نتیجه بگیرید یک تصویر ایزومتریک M (در واقع بستار $M_۰$) در یک فضای متریک تام چگال است.