به‌نام او

در تمامی این سوالات M و N فضاهای متریک هستند.

۱) فرض کنید $f : R \to R$ تابعی است که برای هر $x \in R$ داریم:

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x-h) = 0$$

آیا می‌توان نتیجه گرفت f پیوسته است؟

۲) فرض کنید $f : [0,1] \to [0,1]$ پیوسته است، نشان دهید f حداقل یک نقطه ثابت دارد. (x را یک نقطه ثابت f می‌نامند هرگاه $f(x) = x$)

۳) تابع $f : (a,b) \to R$ را محدب می‌گویند اگر برای هر $x, y \in (a,b)$ و هر $0 < \lambda < 1$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

ثابت کنید هر تابع محدب پیوسته است و اگر f محدب و g صعودی باشد در این‌صورت $g \circ f$ نیز محدب است.
همچنین نشان دهید برای $a < s < t < u < b$ داریم:

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

۴) تابع $f : M \to N$ را باز می‌نامند اگر برای هر زیر مجموعه باز U از M، $f(U)$ در N باز باشد. نشان دهید اگر $f : R \to R$ پیوسته و باز باشد دراین‌صورت f یکنواست.

۵) فرض کنید $f : M \to N$ پیوسته یکنواخت است، اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی در M باشد، ثابت کنید $\{f(x_n)\}$ دنباله‌ای کوشی در N است.

۶) فرض کنید $f : (a,b) \to R$ تابعی دلخواه است، اگر E مجموعه نقاطی باشد که f در آنجا ناپیوستگی ساده (از نوع اول) دارد، نشان دهید E حداکثر شماراست.

راهنمایی: بنویسید $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ که در آن برای هر $x \in E_1$ داریم $f(x-) < f(x+)$، E_2 و E_3 را نیز به‌طور مناسب تعریف کنید. به هر $x \in E_1$ ای سه‌تایی (p,q,r) از اعداد گویا را طوری نسبت دهید که

(a) $f(x-) < p < f(x+)$

(b) اگر $a < q < t < b$ در این‌صورت $f(t) < p$.

(c) اگر $a < t < r < b$ در این‌صورت $f(t) > p$.

۷) فرض کنید برای تابع $f : R \to R$ داریم

$$\forall x, y \in R : |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

نشان دهید f ثابت است.

۸) اگر برای اعداد حقیقی $C_0, C_1, ..., C_n$ داشته باشیم:

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + ... + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0$$

نشان دهید معادله

$$C_0 + C_1 x + ... + C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n = 0$$

حداقل یک ریشه بین صفر و یک دارد.

۹) فرض کنید $f : R \to R$ تابعی مشتق پذیر است.

(a) اگر برای هر $x \in R$ داشته باشیم $f'(x) \neq 1$، نشان دهید f حداکثر یک نقطه ثابت دارد.

(b) فرض کنید $M < 1$ موجود است به‌طوریکه برای هر x داریم $|f'(x)| \leq M$، نشان دهید f یک نقطه ثابت یکتا مانند x دارد و $x = \lim_{n\to\infty} x_n$، که در آن x_1 نقطه‌ای دلخواه است و $x_{n+1} = f(x_n)$ برای $n = 1, 2, ...$.

(c) نشان دهید تابع $f(x) = x + (1 + e^x)^{-1}$ نقطه ثابت ندارد در صورتیکه برای هر x داریم $0 < f'(x) < 1$.

۱۰) $f : R \to R$ تابعی پیوسته است و برای هر $x \neq 0$، $f'(x)$ موجود است. اگر $\lim_{x\to 0} f'(x) = L < \infty$ آیا می‌توان نتیجه گرفت که $f'(0)$ موجود است؟

۱۱) فرض کنید $f : (a, b) \to R$ مشتق پذیر است، ثابت کنید f محدب است اگر و تنها اگر f' صعودی باشد. به‌علاوه اگر $f''(x)$ برای هر $x \in (a, b)$ موجود باشد نشان دهید f محدب است اگر و تنهااگر $f''(x) \geq 0$ برای هر $x \in (a, b)$.

۱۲) فرض کنید $f : (a, \infty) \to R$ دوبار مشتق پذیر است و M_0، M_1 و M_2 به‌ترتیب کوچکترین کران‌های بالا برای $|f(x)|$، $|f'(x)|$ و $|f''(x)|$ روی (a, ∞) هستند. ثابت کنید

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2$$

راهنمایی: برای $h > 0$ با استفاده از قضیه تیلور داریم

$$f'(x) = \frac{1}{2h}(f(x + 2h) - f(x)) - hf''(\xi)$$

برای یک $\xi \in (x, x + 2h)$. بنابراین

$$|f'(x)| \leq hM_2 + \frac{M_0}{h}$$

۱۳) فرض کنید $f : (0, \infty) \to R$ دوبار مشتق پذیر است و f'' روی $(0, \infty)$ کراندار است.اگر $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$، نشان دهید $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

راهنمایی: در تمرین قبل a را به ∞ میل دهید.