به نام او

تمرین درس ریاضیات پیشرفته ۱

سری ۵ — معادلات ناهمگن

معادلات ناهمگن زیر را حل کنید.

۱.

$$u_t - ۴u_{xx} = ۵۰e^{-۲x}, \qquad ۰ < x < \pi, \quad t > ۰,$$
$$u(x,۰) = \sin x \text{ و } u_x(۰,t) = ۱ \text{ و } u(\pi,t) = ۲.$$

۲.

$$u_t = ۹u_{xx} - ۶u_x + u + \sin x, \qquad -\pi < x < \pi, \quad t > ۰,$$
$$u(x,۰) = x \text{ و } u(-\pi,t) = u(\pi,t) + ۱ \text{ و } u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t) + ۲.$$

۳.

$$u_t - ۴u_{xx} = xt, \qquad ۰ < x < ۱, \quad t > ۰,$$
$$u(x,۰) = \sin \pi x \text{ و } u(۰,t) = t \text{ و } u(۱,t) = t^۲.$$

۴.

$$u_t - ku_{xx} = x\cos t, \qquad ۰ < x < \pi, \quad t > ۰,$$
$$u(x,۰) = \sin x \text{ و } u_x(۰,t) = t^۲ \text{ و } u_x(\pi,t) = ۲t.$$

۵.

$$u_t - u_{xx} + u = ۲x^۲t, \qquad ۰ < x < ۱, \quad t > ۰,$$
$$u(x,۰) = \cos\frac{۳\pi}{۲}x \text{ و } u(۰,t) = ۱ \text{ و } u_x(۱,t) = \frac{۳\pi}{۲}.$$

۶.

$$u_t - ۲u_{xx} = ۱, \qquad ۰ < x < ۱, \quad t > ۰,$$
$$u(x,۰) = x \text{ و } u_x(۰,t) = \sin t \text{ و } u_x(۱,t) + u(۱,t) = ۲.$$

۷.

$$u_{tt} = c^۲u_{xx} + \sinh x, \qquad ۰ < x < ۱, \quad t > ۰,$$
$$u(x,۰) = ۰ \text{ و } u_t(x,۰) = x \text{ و } u(۰,t) = ۱ \text{ و } u_x(۱,t) = ۲.$$

. .۸

$$u_{tt} = c^{۲}u_{xx} + u + x^{۲}, \qquad ۰ < x < ۱, \quad t > ۰,$$

$$u(x,۰) = x \text{ و } u_t(x,۰) = ۰ \text{ و } u_x(۰,t) = ۰ \text{ و } u(۱,t) = ۱.$$

. .۹

$$u_{tt} - u_{xx} = x\sin t, \qquad ۰ < x < ۱, \quad t > ۰,$$

$$u(x,۰) = x \text{ و } u_t(x,۰) = ۰ \text{ و } u_x(۰,t) = t^{۲} \text{ و } u_x(۱,t) = \cos t.$$

. .۱۰

$$u_{tt} - ۴u_{xx} = xt, \qquad ۰ < x < ۱, \quad t > ۰,$$

$$u(x,۰) = x \text{ و } u_t(x,۰) = ۰ \text{ و } u(۰,t) = t^{۲} \text{ و } u_x(۱,t) = ۱ + t.$$

. .۱۱

$$u_{tt} + ۲c^{۲}u_t - c^{۲}u_{xx} = x + t, \qquad ۰ < x < ۱, \quad t > ۰,$$

$$u(x,۰) = x \text{ و } u_t(x,۰) = ۱ \text{ و } u_x(۰,t) = t \text{ و } u(۱,t) = ۱.$$

. .۱۲

$$u_{tt} - ۹u_{xx} = x + t^{۲}, \qquad ۰ < x < ۱, \quad t > ۰,$$

$$u(x,۰) = \sin\frac{\pi x}{۲} \text{ و } u_t(x,۰) = ۱ + x \text{ و } u_x(۰,t) = \frac{\pi}{۲} \text{ و } u_x(۱,t) = t.$$

. .۱۳

$$u_{xx} + u_{yy} = x\cos y, \qquad ۰ < x < ۱, \quad ۰ < y < \pi,$$

$$u(۰,y) = y \text{ و } u(۱,y) = ۱ \text{ و } u_y(x,۰) = x \text{ و } u_y(x,\pi) = x + ۱.$$

. .۱۴

$$\nabla^{۲}u = x^{۲} - y^{۲}, \qquad ۰ < x < \pi, \quad ۰ < y < ۱,$$

$$u_x(۰,y) = y \text{ و } u_x(\pi,y) = y^{۲} \text{ و } u_y(x,۰) = x \text{ و } u_y(x,\pi) = \sin x.$$

. .۱۵

$$\nabla^{۲}u = r\theta, \qquad r < ۲, \quad ۰ < \theta < \pi,$$

$$u_r(۲,\theta) = \sin\theta \text{ و } u(r,۰) = r \text{ و } u(r,\pi) = ۱.$$

. .١٦

$$\nabla^{٢}u = -r^{٢}\sin ٢\theta, \qquad ١ < r < ٢,$$

$$u_r(١,\theta) = \sin\theta \text{ و } u_r(٢,\theta) = \cos\theta.$$

. .١٧

$$\nabla^{٢}u = r\cos ٤\theta, \qquad r < ٢,$$

$$u(٢,\theta) = \sin ٣\theta.$$

. .١٨

$$u_t = c^{٢}\nabla^{٢}u + xyt, \qquad ٠ < x < ١, \quad ٠ < y < ١, \quad t > ٠,$$

$$u(x,y,٠) = \sin^{٢}\pi x \sin\pi y,$$

$$u(٠,y,t) = u_x(١,y,t) = u_y(x,٠,t) = u(x,١,t) = ٠.$$

. .١٩

$$u_{tt} = c^{٢}\nabla^{٢}u + xyzt, \qquad ٠ < x < ١,\ ٠ < y < ١,\ ٠ < z < ١,\ t > ٠,$$

$$u(x,y,z,٠) = \sin\pi x \sin\pi y \sin\pi z \text{ و } u_t(x,y,z,٠) = ٠,$$

$$u(٠,y,z,t) = u(١,y,z,t) = ٠ \text{ و } u(x,٠,z,t) = u(x,١,z,t) = ٠,$$

$$u(x,y,٠,t) = u(x,y,١,t) = ٠.$$

. .٢٠

$$\nabla^{٢}u = r\sin\theta\cos\phi, \qquad r < ١,$$

$$u(١,\theta,\phi) = \cos^{٢}\theta\sin\phi, \qquad ٠ \le \theta \le ٢\pi, \quad ٠ \le \phi \le \pi.$$

. .٢١

$$u_{tt} = c^{٢}\nabla^{٢}u + xy\sin t, \qquad ٠ < x < \pi, \quad ٠ < y < \pi, \quad t > ٠,$$

$$u(x,y,٠) = xy, \qquad u_t(x,y,٠) = x + y,$$

$$u(٠,y,t) = ٠, \qquad u(\pi,y,t) = y + \cos y,$$

$$u_y(x,٠,t) = \frac{x}{\pi}, \qquad u(x,\pi,t) = \left(١ - \frac{١}{\pi}\right)x + \sin x.$$

. .٢٢

$$u_{tt} + u_{xxxx} = xt, \qquad ٠ < x < ١, \quad t > ٠,$$

$$u(x,٠) = x \text{ و } u_t(x,٠) = x + ١,$$

$$u(٠,t) = t \text{ و } u(١,t) = ١ \text{ و } u_{xx}(٠,t) = t^{٢} \text{ و } u_{xx}(١,t) = ٠.$$

. .۲۳

$$u_{tt} + ۱۶u_{xxxx} = x + t, \qquad ۰ < x < ۱, \quad t > ۰,$$

$$u(x, ۰) = x + ۱ \text{ و } u_t(x, ۰) = ۰,$$

$$u(۰, t) = t \text{ و } u(۱, t) = t^۲ \text{ و } u_x(۰, t) = ۱ \text{ و } u_x(۱, t) = t.$$

. .۲۴

$$u_{tt} + u_{xxx} = x \sin t, \qquad ۰ < x < ۱, \quad t > ۰,$$

$$u(x, ۰) = x \text{ و } u_t(x, ۰) = x,$$

$$u_x(۰, t) = t \text{ و } u_x(۱, t) = ۱ \text{ و } u_{xxx}(۰, t) = ۰ \text{ و } u_{xxx}(۱, t) = t^۲.$$