

به نام او  
تمرین درس ریاضیات پیشرفته ۱  
معادلات اشترم - لیوویل

۱. مقادیر خاص و توابع خاص مسائل اشترم - لیوویل منظم زیر را تعیین کنید.

الف)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y'(\circ) = 0$  و  $y(\pi) = 0$ .

ب)  $y'' + y' + (1 + \lambda)y = 0$ ,  $y(\circ) = 0$  و  $y(1) = 0$ .

پ)  $y'' + 2y' + (1 - \lambda)y = 0$ ,  $y(\circ) = 0$  و  $y'(1) = 0$ .

ت)  $y'' - 3y' + 3(1 + \lambda)y = 0$ ,  $y'(\circ) = 0$  و  $y'(\pi) = 0$ .

۲. مقادیر خاص و توابع خاص مسائل اشترم - لیوویل متناوب زیر را به دست آورید.

الف)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(-1) = y(1)$  و  $y'(-1) = y'(1)$ .

ب)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(\circ) = y(2\pi)$  و  $y'(\circ) = y'(2\pi)$ .

پ)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(\circ) = y(\pi)$  و  $y'(\circ) = y'(\pi)$ .

۳. مقادیر خاص و توابع خاص مسائل اشترم - لیوویل منظم زیر را بیابید.

الف)  $x^2 y'' + 3xy' + \lambda y = 0$ ,  $y(1) = 0$  و  $y(e) = 0$ .

ب)  $\frac{d}{dx}((2+x)^2 y') + \lambda y = 0$ ,  $y(-1) = 0$  و  $y'(1) = 0$ .

پ)  $(1+x)^2 y'' + 2(1+x)y' + 3\lambda y = 0$ ,  $y'(\circ) = 0$  و  $y'(1) = 0$ .

۴. تمام مقادیر خاص و توابع خاص مسائل اشترم - لیوویل نامنظم زیر را به دست آورید.

الف)  $x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0$ ,  $y(1) = 0$  و  $x = 0$  کران دار و  $y$  و  $y'$  در  $x = 0$  کران دار و  $y(1) = 0$ .

ب)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(\circ) = 0$  و  $y$  در بینهایت کران دار و  $y'(\circ) = 0$ .

۵. تابع  $f(x) = x$  را روی  $[\circ, \pi]$  برحسب توابع خاص مسأله اشترم - لیوویل زیر بسط دهید.

$y'' + 2y' + \lambda y = 0$ ,  $y(\circ) = 0$  و  $y'(\pi) = 0$ .

۶. هر یک از معادلات زیر را به صورت خودالحاقی بنویسید.

الف) معادله لاگر:  $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

ب) معادله هرمیت:  $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

پ) معادله چبیشف:  $(1-x)^2 y'' - xy' + n^2 y = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

۷. کلیه جواب‌های مسائل با شرایط مرزی غیرهمگن زیر را به دست آورید.

$$y'' + 3y' + 2y = 2x + 1, \quad 2y(0) - y(1) = 0 \text{ و } y'(1) = 2. \quad (\text{الف})$$

$$xy'' + y' = -x, \quad y(1) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} |y(x)| < \infty. \quad (\text{ب})$$

$$xy'' + y' - \frac{n^2}{x}y = x, \quad y(1) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} |y(x)| < \infty. \quad (\text{پ})$$

۸. مسائل اشترم - لیوویل از مرتبه چهارم زیر را حل کنید.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0. \quad (\text{الف})$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 2\frac{d^2 y}{dx^2} - \lambda y = 0, \quad y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0. \quad (\text{ب})$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'''(0) = y'(1) = y'''(1) = 0. \quad (\text{پ})$$

۹. نشان دهید مسأله اشترم - لیوویل نامنظم زیر دارای جواب  $\lambda = -\omega^2$ ،  $\omega \geq 0$  و  $y(x) = \cos \omega(x - x_0)$  که در آن  $x_0$  مقداری ثابت است.

$$y'' - \lambda y = 0, \quad |y(x)| \leq 1.$$