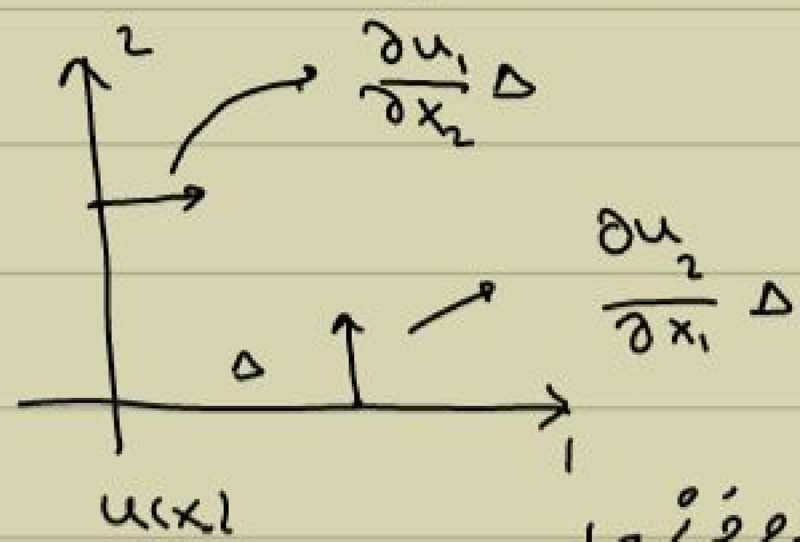
- چرخش متناسب با $\underset{\sim}{\nabla}\times$ (curl) است



در شکل روبرو چرخش جریان حول محور $\hat{e}_3$ نشان داده شده است پس کل چرخش حول $\hat{e}_3$ می‌شود

$$\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)=\Delta\left(\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{u}\right)_3$$

اگر این عبارت صفر باشد به معنای این است که شاره حول محور $\hat{e}_3$ چرخش ندارد

پس اگر $\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{u}=0$ باشد شاره بدون گرداب یا بی‌گرداب vorticity-free می‌گوییم.

جریان پتانسیل Potential flow

اگر شاره بی گرداب باشد، یعنی $\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{u}=0$ پس می‌توان میدان برداری سرعت $\underset{\sim}{u}$ را حتما به صورت گرادیان یک تابع نوشت

$$\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{\nabla}\phi$$

$$\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{\nabla}\times(\underset{\sim}{\nabla}\phi)=0$$

حال اگر شاره بی‌گردابه و تراکم‌ناپذیر هم باشد، یعنی

$$\nabla \cdot u = 0$$

در نتیجه داریم $\nabla^2 \phi = 0$ و این نشان

می‌دهد پتانسیل ϕ پاسخ معادله لاپلاس با شرایط مرزی مشخص است.

قضیه کلوین: اگر شاره پتانسیلی باشد، پتانسیلی خواهد ماند (بی‌گردابه)

این قضیه تا وقتی اثرات مرزی بی‌اهمیت باشد درست است.

- شرایط مرزی

- سرعت در مرز شاره - جامد

وقتی شاره در داخل ظرف به حرکت در می‌آید سؤال این است که سرعت شاره در مجاورت سطح چگونه است.

شاید در ابتدا اینطور بشود فرض کرد که حرکت شاره در مجاورت سطح مستقل از آن است و فقط نقش سطح آن است که مؤلفه عمود سرعت را صفر کند که لازمه تغییر مسیر دادن نقطه‌ی حرکت سیال است.

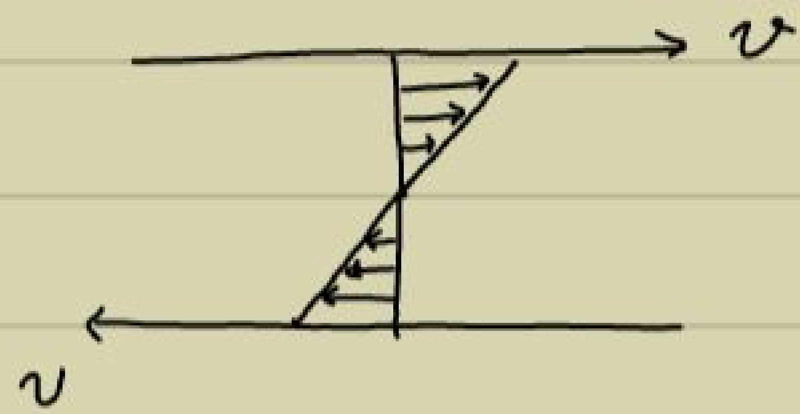
$$u_{\perp}\Big|_{\text{سطح}} = 0$$

ولی در واقعیت احتمال حذف اصطکاک میان شاره و سطح وجود ندارد و این اصطکاک باعث می‌شود که مؤلفه مماسی سرعت نیز برابر سرعت مرز شود. به این شرط مرزی

شرط مرزی بدون لغزش (no slip) را می‌گیریم:

$$u_{\parallel}\Big|_{\text{مرز}} = u_B$$

به طور مثال اگر شاره‌ی نیوتنی میان دو سطح موازی را درنظر بگیریم که نسبت به هم با سرعت $2v$ حرکت می‌کنند در حالت پایا سرعت شاره به صورت خطی تغییر می‌کند، و در شرایط بدون لغزش سرعت در روی مرزها برابر سرعت مرز است



$$u(y)\Big|_{y=\pm d} = \pm v$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{2v}{2d} = \frac{v}{d} \rightarrow u = \frac{v}{d}y$$

حال سوال این است که شرط بدون لغزش چقدر درست است،

اگر درست نباشد و سرعت در روی مرز

$$|u(\pm d)| = v' < v$$

در این حالت داریم

$$u(d+d') = v$$

$$\frac{du_1}{dx_2} = \frac{u'}{d}$$

$$u_1 = \frac{u'}{d}x_2$$

$$\frac{d'}{d} = \frac{v-u'}{u'}$$

برای تخمین از d فرض کنیم که شاره گازی است. و فرض می‌کنیم که ذرات گاز بعد از برخورد با سطح با سرعت سطح از آن خارج می‌شوند.
پس سرعت گاز در روی سطح میانگین سرعت ذرات درست قبل از برخورد و بعد از برخورد است.

$$u' = \frac{1}{2}\left(u_{1\,before} + u_{1\,after}\right)$$

$$u_{1\,after} = v \quad , \quad u_{1\,before} = u_1(d-l)$$

$l \equiv$ طول پویش آزاد

$$u' = \frac{1}{2}\left(v + \frac{u'}{d}(d-l)\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{l}{d}+1\right)u' = v \rightarrow u' = v\left(1+\frac{l}{d}\right)^{-1}$$

$$d' = d\,\frac{v-u'}{u'} = d\,\frac{l}{d} = l$$

پس ناحیه که از رتبه طول پویش آزاد است. نتیجه می‌شود که در سیالات هم این ناحیه از رتبه ابعاد میکروسکوپی باید باشد. پس در ابعاد ماکروسکوپی فرض بدون لغزش فرض خوبی است.

$$\left(l_{air} \sim 10^{-7}\,m\right)$$

آیا برخ تغییرات یکنواخت بالا برای دو صفحه موازی با سرعت مخالف برخ پایا است.

$$u_1 = u_1(x_2)$$

$$s_3 = s_{12} = s_{21} = \eta\,\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \rightarrow$$

نیرو در واحد سطح با
عنصری به ضخامت δ

تغییر تکانه

$$\frac{\partial s_3}{\partial x_2}\,\delta A = \rho\,\delta A\,\frac{\partial u_1}{\partial t}$$

$$\eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}$$

معادله پخش تک بعدی.

- حل پایا:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0 \rightarrow u_1 = A x_2 + B$$

روابط مرزی $u_1(\pm d) = \pm v$

$$u_1(x_2) = \frac{v}{d} x_2 \rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{v}{d} \rightarrow (\nabla \times u)_3 = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{v}{d} \neq 0$$

شاره بی‌گردابه نیست

- زمان رسیدن به این پاسخ پایا چگونه است؟

فرض کنید که از حالت سکون ناگهان سطوح به سرعت های v و $-v$ برسند. شکل تغییرات سرعت برای رسیدن به حالت پایا چگونه است؟

معادله پخش برای سرعت $\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}$ را با توجه اینکه
در این حالت تنها یک مولفه گردابه هست و داریم

$$\Omega_3 = (\nabla \times u)_3 = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

می‌توانیم به صورت $\frac{\partial \Omega_3}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial x_2^2}$ نوشت که نشان می‌دهد
گردابه هم از همان معادله پخش تبعیت می‌کند. فقط در شرایط
مرزی متفاوت هستند

شرایط مرزی در $x_2 = \pm d$

$$u(\pm d) = \pm v$$

$$\left.\frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2}\right|_{x_2 = \pm d} = 0$$

با توجه به شرایط مرزی فوق دیده می‌شود که پاسخ معادله پخش برای Ω توزیع گوسی
و برای u تابع خطا است. اگر معادله را در زمان‌های کوتاه و برای این مثال
تقریب بزنیم

$$\Omega_3(x_2, t) = A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(d-x_2)^2}{2\sigma^2}}$$

زمان‌های کوتاه و x_2

، $\boxed{\sigma^2 = 2\nu t}$

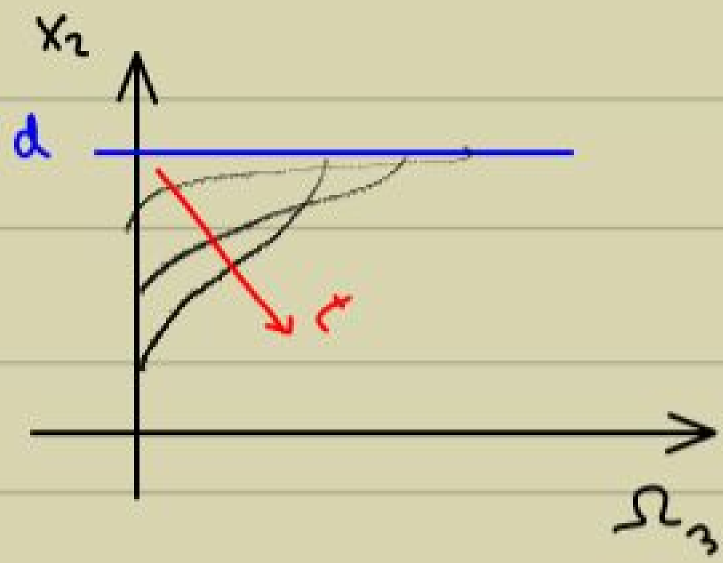
در t ثابت ، $x = x_1$

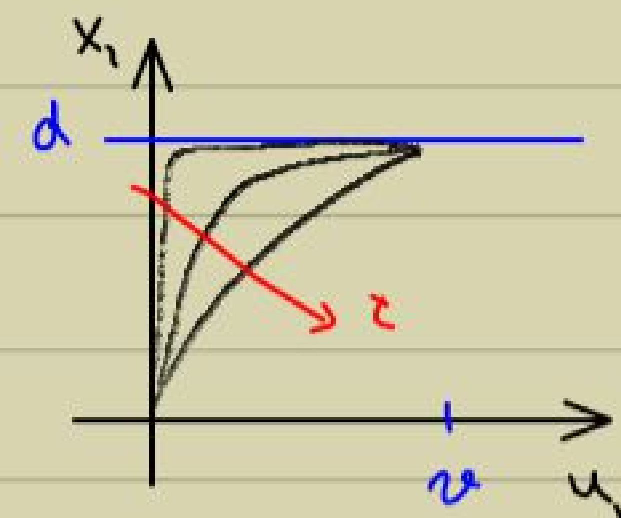
$$\int_{u(d)}^{u(x)} du = \int_d^x \Omega(x)\,dx = \int_d^x \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(d-x)^2}{2\sigma^2}} dx$$

تغییر متغیر $\frac{d-x}{\sqrt{2\sigma^2}} = y \rightarrow dx = -dy\sqrt{2\sigma^2}$

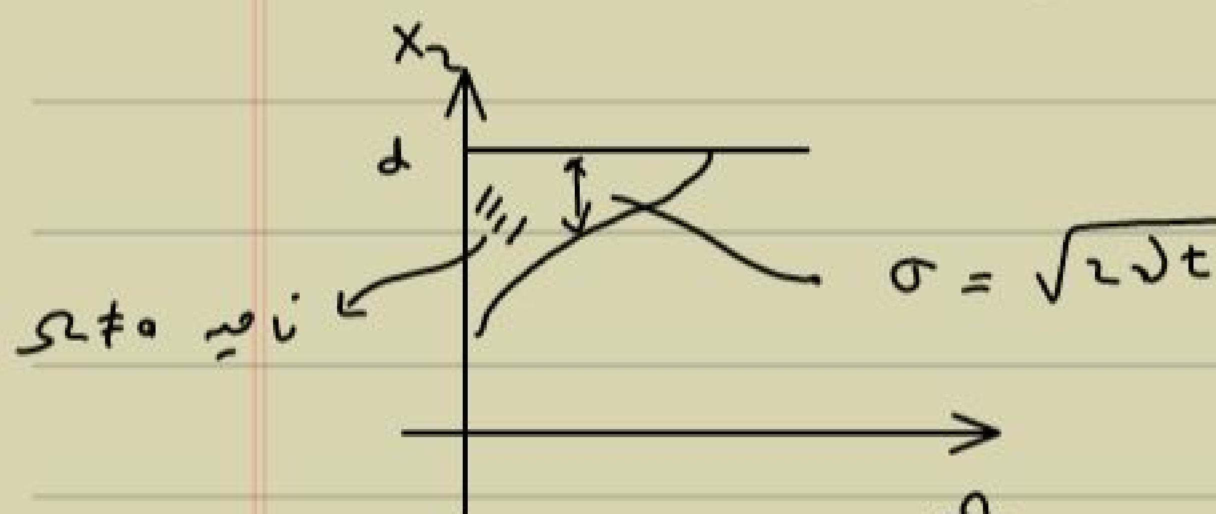
$$u(x) - v = \frac{A}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{d-x}{\sqrt{2\sigma^2}}} e^{-y^2} dy = \frac{A}{2} \mathrm{Erf}\left(\frac{d-x}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)$$

تغییرات u با زمان　　　　　　تغییرات Ω با زمان





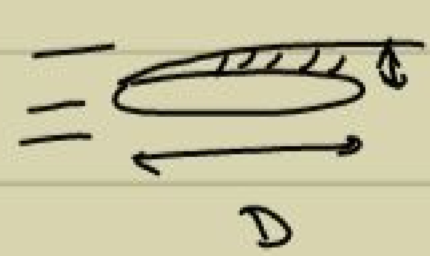
اگر به تغییرات Ω_3 در زمان دراز t نگاه کنیم



در ناحیه‌ای در نزدیکی سطح به ضخامت $\sigma = \sqrt{2\nu t}$ میدان گردابه دارد که ضخامت این ناحیه با $t^{1/2}$ افزایش می‌یابد.

- لایه مرزی یا سطحی

حال اگر مانعی در مسیر جریان بدون گردابه قرار گیرد در نزدیکی این سطح لایه‌ای سطحی ایجاد می‌شود که حداکثر ضخامت آن متناسب با جذر زمان گذشته از سطح است



$$\sigma(D) = \sqrt{2\nu t} = \sqrt{\frac{2\nu D}{u}}$$

$$\sigma(D) = D\sqrt{\frac{2\nu}{uD}} = D\sqrt{\frac{2}{Re}}$$

یعنی $\frac{\sigma(D)}{D} \simeq \sqrt{\frac{2}{Re}}$