۱- اصل برنولی

یادآوری از مکانیک کلاسیک

$$\underline{F} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$= m\frac{dv}{dx}v$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{d(v^2)}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$F.dx = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\int F.dx = \Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$ تئورم کار انرژی

در سیالات: $\underline{u}(x,t)$ میدان سرعت (فعلاً یک بعدی فرض کنید)

$$u(x_0+\Delta x) = u(x_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0}\Delta x$$

اگر تغییر سرعت جزء خاصی در شاره مدنظر باشد $\Delta x = u\Delta t$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\underbrace{\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta t}}_{\text{تغییر سرعت ماده در زمان}} = \frac{\partial u}{\partial x}u = \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}$$

سمت چپ تغییر حرکت در زمان است و اگر در جرم ρl^3 ضرب شود
تغییر اندازه حرکت را می‌دهد، که باید برابر نیروی وارد بر جرم (حجم) باشد.

این نیرو ناشی از اختلاف فشار در دو سوی حجم l^3 است

$$l^2 \cdot l \frac{\partial p}{\partial x} = l^3 \frac{\partial p}{\partial x}$$

پس داریم

$$-l^3 \frac{\partial p}{\partial x} = \rho l^3 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2\right)$$

علامت منفی برای این است که نیرو عکس جهت افزایش فشار است.

در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{1}{2}\rho u^2\right)=0$$

یا

$$p+\frac{1}{2}\rho u^2 = \text{ثابت}$$

ثابت سمت چپ برای تمام نقاط روی یک خط جریان است و
برای خطوط مختلف جریان می‌تواند متفاوت باشد. البته برای منبع بزرگ
در تمام نقاط ثابت است چون در پشت پیستون سرعت و فشار یکسان
است (صرف‌نظر از گرانش)

در بدست آوردن قانون برنولی در شکلی که آمد تراکم ناپذیری فرض شده است

تراکم پذیری اینگونه تعریف می‌شود

$$\beta = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dP}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \beta\,\Delta P \xrightarrow{\text{برنولی}} \frac{1}{2}\beta\left(U_1^2 - U_2^2\right)\rho$$

<u>تراکم پذیری چه وقت قابل صرف‌نظر کردن است؟</u>

برای داشتن اختلاف فشار زیاد اختلاف سرعت باید داشت

فرض کنیم $U = U_1 \gg U_2$

$$\Delta P \approx \frac{1}{2}\rho\beta U^2 = \frac{1}{2}\frac{U^2}{u_s^2} = \frac{1}{2}M^2$$

معنی آن این است که برای صرف‌نظر کردن از تراکم پذیری باید سرعت‌ها خیلی کمتر از سرعت صوت باشد. (شرط لازم)

شرطی که در مورد سرنگ کار می‌کند

امکان صرفنظر کردن از تنش برشی

دیدیم که در شاره ها در حالت تعادل تنش برشی صفر است ولی این در مورد شاره در حالت پایا در حالت کلی درست نیست. در بدست آوردن تابعیت برنولی ما بطور ضمنی فرض کرده ایم که می توان از آن صرفنظر کرد و فشار بر طبق قانون پاسکال با یک کمیت اسکالر توصیف می شود. آیا این فرض درست است؟

تغییرات سرعت در برنولی زیاد است را این تخمین از تغییرات فشار معادل $\Delta p \approx \frac{1}{2}\rho u^2$ را می دهد. اگر فرض کنیم که تغییر سرعت u در محدوده ای به طول L باشد تنش برشی حداکثر می تواند $\eta \frac{u}{L} = s$ باشد.

تنش قابل صرفنظر کردن است اگر

$$s \ll \Delta p$$

$$\eta \frac{u}{L} \ll \frac{1}{2}\rho u^2 \rightarrow 1 \ll \frac{1}{2}\frac{\rho u L}{\eta} \rightarrow Re \gg 1$$

نکته 1:

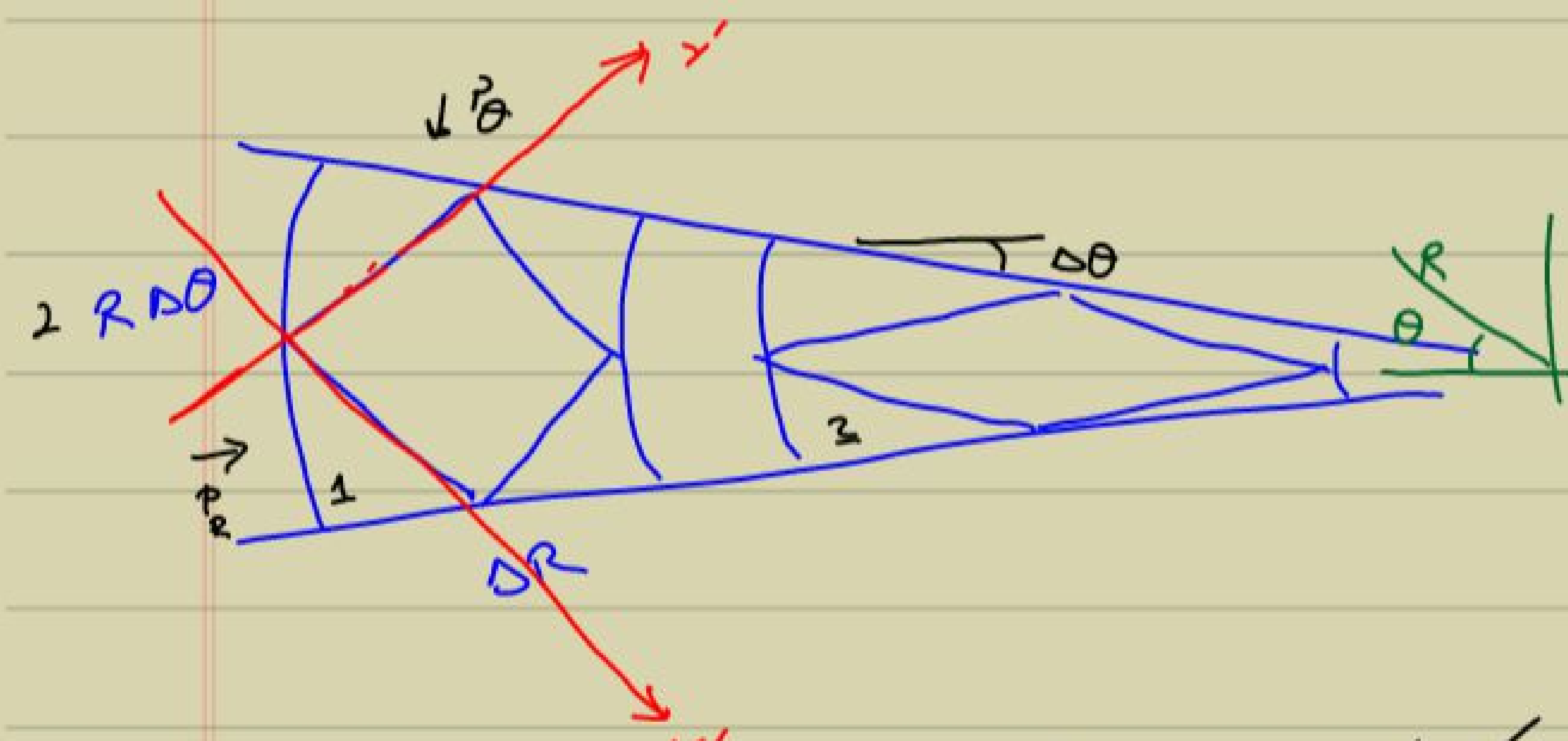
عبارت فوق عموما وقتی سرعت در نقاط مختلف متفاوت است، درست است.

ولی در خیلی از مواقع حتی با حضور اختلاف فشار سرعت در نقاط مختلف ثابت است (جریان داخل لوله سرنگ). در این گونه مواقع نیروی حاصل از تنش برشی تغییرات فشار را خنثی می کند.

نکته II :

در بعضی از مواقع تنش برشی در نیروی وارد بر یک عنصر حجمی دو سهم متفاوت دارد که یکدیگر را خنثی می‌کنند و در نتیجه عامل تغییر سرعت همان فشار است که با معادله برنولی مستقل از مقدار تنش برشی (به مقدار زیاد رسیده باشند) کار می‌کند.

دهانه سوزن سرنگ را با مختصات کروی تحلیل می‌کنیم



فرض کنیم که شاره با تقارن کروی به دریچه نزدیک می‌شود در تمام نقاط سرعت در جهت $\hat{R}$ است و سرعت در هر نقطه تابع R است.

$$\underbrace{Q}_{\text{ثابت}} = 2\pi R^2 u(R) \rightarrow u(R) = \frac{Q}{2\pi R^2}$$

اگر به عنصر حجمی که در شکل نشان داده شده است (مخروط ناقص 1) نگاه کنیم به نظر می‌رسد که در روی سطوح این عنصر هیچ اختلاف سرعت برشی و در نتیجه تنشی وجود ندارد. و حرکت و تغییر سرعت عنصر به دلیل نیروهای فشاری p_θ و p_R است.

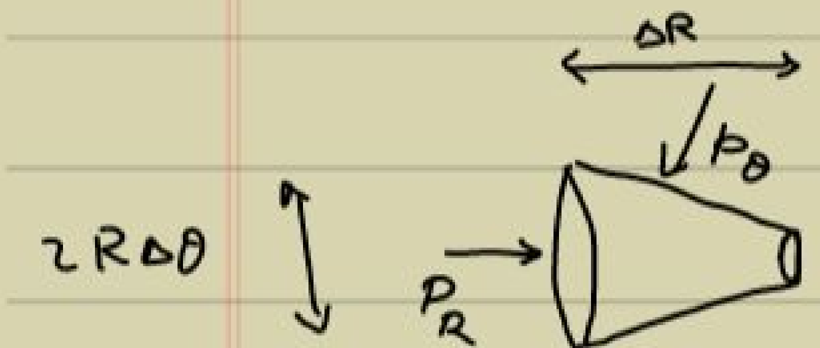
ولی اگر به تحول شکل در زمان نگاه کنیم ربعی که در داخل عنصر رسم شده است
باید به لوزی تبدیل شود. پس اگر در دستگاه O' بنشینیم تنش s' را در
روی محور y' مشاهده خواهیم کرد.

① $p = \frac{1}{3}(p_R + 2p_\theta)$

$s'_3 = \cos\gamma \sin\gamma\, (p_1 - p_2) \qquad \gamma = 45^\circ$

② $2s' = p_\theta - p_R$

(1,2) $\Rightarrow \begin{cases} p_R + 2p_\theta = 3p \\ p_R - p_\theta = -2s' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_R = p - \frac{4}{3}s' \\ p_\theta = p + \frac{2}{3}s' \end{cases}$ ③



نیروی خالص وارد بر عنصر حجم از تقارن
پیداست که فقط مولفه افقی دارد. ولی همین مولفه دو بخش دارد که ریشه خود
را از دوش p_R, p_θ دارند.

p_R سهم: $\quad \frac{d}{dR}\left(\pi R^2 \Delta\theta^2 p_R\right)\Delta R = \Delta\Omega\, \Delta R\, \frac{d(R^2 p_R)}{dR}$

$\Delta\Omega = \pi \Delta\theta^2$

p_θ سهم: $\quad p_\theta\, (2\pi R \Delta\theta\, \Delta R) \sin\Delta\theta = \Delta\Omega\, \Delta R\, [2R p_\theta]$

نیروی کل $= \Delta\Omega\, \Delta R \left[2R p_R + R^2 \frac{dp_R}{dR} - 2R p_\theta\right]$

$= \Delta\Omega\, \Delta R \left[R^2 \frac{d}{dR}\left(p - \frac{4}{3}s'\right) - 2R\underbrace{(p_\theta - p_R)}_{2s'}\right]$

$= \Delta\Omega\, \Delta R \left[R^2 \frac{dp}{dR} - \frac{4}{3}R^2 \frac{ds'}{dR} - 4Rs'\right]$

اگر

$$\frac{R}{3}\frac{ds'}{dR} = -s'$$

سهم s' از نیرو حذف می‌گردد

$$\frac{ds'}{s'} = -3\frac{dR}{R} \rightarrow \underline{s' \sim R^{-3}}$$

می‌دانیم $s' \sim \eta \frac{d u(R)}{dR} \sim \eta \frac{d R^{-2}}{dR} \sim \eta R^{-3}$

پس در این مسئله تنش برشی سهمی در شتاب ندارد. به شرطی که به جای مؤلفه‌های شتاب از p استفاده کنیم. اگر در فاصله خیلی دور از دریچه که u تقریباً صفر است $p = p^*$ باشد می‌توانیم قانون برنولی به شکل

$p + \frac{1}{2}\rho u^2 = p^*$ نوشت

ولی فراموش نکنیم که نیرویی که ما داریم حساب می‌کنیم متناسب با p_R است

و مستقل از اینکه s' در شکل گذشته سهمی در شتاب دارد یا نه ولی حتماً در تلف انرژی سهم دارد. پس قانون برنولی به عنوان قانون بقای انرژی همیشه تقریب است.