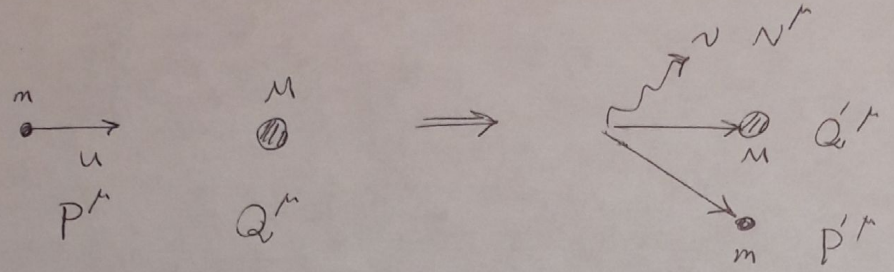
به نام خدا

پاسخ نامه تمرین سری پنجم نسبیت خاص

سوال اول



$$\begin{cases} P = \gamma(u)(m, m\vec{u}) \\ Q = (M, \vec{0}) \end{cases}$$

$$N = h\nu(1, \hat{n})$$

$$P + Q = P' + Q' + N$$

$$(P + Q - N)^2 = (P' + Q')^2$$

$$\longrightarrow \cancel{P^2} + \cancel{Q^2} + \underbrace{\cancel{N^2}}_{0} + 2P\cdot Q - 2P\cdot N - 2Q\cdot N = \cancel{P'^2} + \cancel{Q'^2} + 2P'\cdot Q'$$

$$\underline{P\cdot Q} - \underline{P\cdot N} - \underline{Q\cdot N} = P'\cdot Q'$$

$$(mM\gamma(u)) - (\gamma(u)\, m h\nu(1 - u\cdot\hat{n})) - (M h\nu) = mM\gamma(\underline{u_{12}})$$

سرعت الکترون و هسته نسبت به هم بعد از برخورد

$$h\nu\left[M + \gamma(u)\, m\,(1 - u\cdot\hat{n})\right] = mM\left[\gamma(u) - \gamma(u_{12})\right]$$

$$\longrightarrow h\nu = \frac{mM\left[\gamma(u) - \gamma(u_{12})\right]}{M + m\gamma(u)(1 - u\cdot\hat{n})}$$

برای اینکه انرژی فوتون به بیشینه مقدار خود برسد

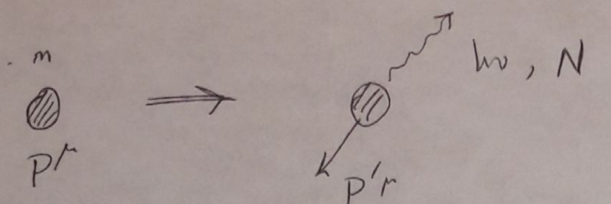
باید $\gamma(u_{12}) = 1$ (کمترین مقدار خود)

و در $u\cdot\hat{n}$ ، $\hat{n} \parallel \vec{u}$ باشد.

← الکترون و هسته باید با یک سرعت خارج شوند و فوتون در راستای الکترون ورودی خارج شود.

$$h\nu_{max} = \frac{mM\left[\gamma(u) - 1\right]}{M + m\gamma(u)(1 - u)}$$

سوال دوم



$$P = P' + N$$

$$P = (m, 0)$$

$$N = h\nu(1, \hat{n})$$

$$P' = (E', \vec{P}')$$

$$\longrightarrow P' = P - N = (m, 0) - h\nu(1, \hat{n})$$

$$= (\underbrace{m - h\nu}_{E'}, -h\nu\hat{n})$$

$$, \quad E' = E - \Delta E = m - \Delta E = m - h\nu$$

$$\underline{\Delta E = h\nu}$$

سوال سوم

$$\gamma + p \longrightarrow \pi^0 + p$$

$$\left\{\begin{array}{l} h\nu = kT \\ \text{در دستگاه CMB} , \; T = ۲,۷۲\,K \end{array}\right.$$

$$P + N = P' + \Pi$$

$$\longrightarrow \cancel{P^2} + \cancel{N^2} + 2P.N = \cancel{P'^2} + \cancel{\Pi^2} + 2P'.\Pi$$

($N^2 = 0$, $\Pi^2 = m_p^2$)

$$2P.N = \Pi^2 + 2P'.\Pi = m_p^2 + \underbrace{2P'.\Pi}_{m_\pi m_p \gamma(u_{p,\pi})}$$

$$\left\{\begin{array}{l} P = (E_p, \vec{P}) = (\sqrt{p^2 + m^2}, \vec{P}) \\ P_\gamma = N = h\nu(1, \hat{n}) \\ \hat{p}.\hat{n} = \cos\theta \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow 2h\nu(E_p - \vec{p}.\hat{n}) = m_\pi^2 + 2m_p m_\pi \gamma(u_{p,\pi})$$

آستانه انرژی پروتون ورودی زمانی بدست می‌آید که $\gamma(u_{p',\pi})$ کمترین مقدار خود یعنی 1 را بگیرد.

$$\gamma(u_{p',\pi}) = 1 \longrightarrow$$

p ، π باهم حرکت می‌کنند

$$N + P = \Pi + P' \longrightarrow (N+P)^2 = (\Pi + P')^2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Pi = (m_\pi, 0) \\ P' = (m_p, 0) \end{array}\right. \longrightarrow (\Pi + P')^2 = (m_\pi + m_p, 0)^2 = (m_\pi + m_p)^2$$

در دستگاه سکون همراه

$$(N+P)^2 = (\sqrt{p^2 + m_p^2} + h\nu, \vec{p} + h\nu\hat{n})^2 = (h\nu + \sqrt{p^2 + m_p^2})^2 - |\vec{P} + h\nu\hat{n}|^2$$

P^2 آستانه

$$\longrightarrow \left(h\nu + \sqrt{P^2+m_p^2}\right)^2 - \left|\vec{P}+h\nu\hat{n}\right|^2 = (m_p+m_\pi)^2$$

$$\cancel{(h\nu)^2} + \cancel{P^2} + m_p^2 + 2h\nu\sqrt{P^2+m_p^2} - \cancel{P^2} - \cancel{(h\nu)^2} - 2Ph\nu\cos\theta = (m_p+m_\pi)^2$$

$$m_p^2 + 2h\nu\left(\sqrt{P^2+m_p^2} - P\cos\theta\right) = (m_p+m_\pi)^2$$

پروتون ورودی بسیار پرانرژی است

$$P \gg m_p \longrightarrow m_p^2 + 2h\nu P(1-\cos\theta) \simeq (m_p+m_\pi)^2$$

$$\longrightarrow P_{threshold} \simeq \frac{(m_p+m_\pi)^2 - m_p^2}{2h\nu(1-\cos\theta)} = \frac{(m_p+m_\pi)^2 - m_p^2}{2kT(1-\cos\theta)}$$

سوال چهارم :

$$a+b \longrightarrow c+d$$

$$P_a + P_b = P_c + P_d$$

$$s \equiv (P_a+P_b)^2 = (P_c+P_d)^2$$

$$t \equiv (P_a-P_c)^2 = (P_d-P_b)^2$$

$$u \equiv (P_a-P_d)^2 = (P_c-P_b)^2$$

$$P_i \cdot P_j = P_j \cdot P_i$$

$$s = P_a^2 + P_b^2 + 2P_a\cdot P_b = P_c^2 + P_d^2 + 2P_c\cdot P_d$$

$$\longrightarrow P_a\cdot P_b = -\frac{m_a^2+m_b^2}{2} + s \qquad P_c\cdot P_d = -\frac{m_c^2+m_d^2}{2} + s$$

$$t = P_a^2 + P_c^2 - 2P_a\cdot P_c = P_d^2 + P_b^2 - 2P_d\cdot P_b$$

$$\longrightarrow P_a\cdot P_c = \frac{P_a^2+P_c^2}{2} - t = (m_a^2+m_c^2)/2 - t \qquad P_d\cdot P_b = \frac{P_d^2+P_b^2}{2} - t = (m_d^2+m_b^2)/2 - t$$

$$u = P_a^2 + P_d^2 - 2P_a\cdot P_d = P_c^2 + P_b^2 - 2P_c\cdot P_b$$

$$P_a\cdot P_d = \frac{P_a^2+P_d^2}{2} - u = \frac{m_a^2+m_d^2}{2} - u \qquad P_c\cdot P_b = \frac{P_b^2+P_c^2}{2} - u = \frac{m_b^2+m_c^2}{2} - u$$

Scanned by CamScanner

ب)

$$s+t+u = (P_a+P_b)^2 + (P_a-P_c)^2 + (P_a-P_d)^2$$

$$= P_a^2 + P_b^2 + P_c^2 + P_d^2 + 2P_a \cdot \underbrace{(P_a + P_b - P_c - P_d)}_{0}$$

$$= \sum_i P_i^2 = \sum_i m_i^2$$

ج)

$$e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$$

آستانه انرژی: $\mu^+\mu^-$ نسبت به هم ساکن باشند.

$$P_e + P_{e^+} = P_\mu + P_{\mu^+} \longrightarrow P_e^2 + P_{e^+}^2 + 2P_e \cdot P_{e^+} = P_\mu^2 + P_{\mu^+}^2 + 2P_\mu \cdot P_{\mu^+}$$

$$2m_e^2 + 2m_e^2\,\gamma(u_{e,e^+}) = 2m_\mu^2 + 2m_\mu^2(1) = 4m_\mu^2$$

$$\longrightarrow 1 + \gamma(u_{e,e^+}) = 2\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2 \longrightarrow \gamma = 2\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2 - 1$$

$$E_{\min(e)} = \gamma(u_{e,e^+})\, m_e = m_e\left(2\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2 - 1\right)$$

در دستگاهی که e^+ ساکن است.

سؤال هفتم :

$$4p^+ + 2e^- \longrightarrow {}^4_2He^{2+} + \dots$$

$$4m_p c^2 + 2m_e c^2 = m_{{}^4_2He^{2+}}\, c^2 + \Delta E$$

$$\longrightarrow \Delta E = (4m_p + 2m_e - m_{He^{2+}})\, c^2$$

$$L = n\,\Delta E \longrightarrow n = \frac{L}{\Delta E}$$