به نام خدا

تمرین سری دوم نسبیت خاص

مهلت تحویل: دوم آبان

سوال یک:تبدیل لورنتس تعمیم یافته

الف:ناظرهای S و S' را در نظر بگیرید که با سرعت نسبی v در حرکتند.دو ناظر در پیکربندی استاندارد نیستند و محور x آنها زاویه φ با یکدیگر می سازد.(محور z هم جهت است)

ماتریس تبدیل لورنتس را برای این ناظرها بدست آورید.

ب:اکنون فرض کنید مولفه های سرعت نسبی در دستگاه S بصورت $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ باشد.در این صورت ثابت کنید:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1+\alpha(\beta_x)^2 & \alpha\beta_x\beta_y & \alpha\beta_x\beta_y \\ -\gamma\beta_y & \alpha\beta_x\beta_y & 1+\alpha(\beta_y)^2 & \alpha\beta_z\beta_y \\ -\gamma\beta_z & \alpha\beta_x\beta_z & \alpha\beta_z\beta_y & 1+\alpha(\beta_z)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

که $\alpha = (\gamma - 1)/\beta^2$

سوال دوم:ناوردایی عنصر حجم

چهارچوب های لخت S و S' را در نظر بگیرید که با سرعت نسبی v در حرکتند.(فرضهای معمول چهارچوبها را بکار بگیرید)

الف:ساعت ناظر S که در نقطه $x = x_0$نشسته دارای تیکهای ΔT است.فقط با استفاده از نمودار فضا زمانی (مینکوفسکی) قاعده اتساع زمان را از دید ناظر متحرک S' حساب کنید.(جهان خط ساعت را رسم کنید.)

ب:دو ذره را در نظر بگیرید که در دستگاه S بصورت زیر حرکت می کنند:

$$x_1(t) = ut$$
$$x_2(t) = ut + L$$

با استفاده از جهان خط ذرات در دستگاه S و S' و فقط با استفاده از نمودار,قاعده انقباض طول را به دست آورید.

پ:در فضا زمان دو بعدی S (فقط مختصه x را در نظر بگیرید) چهار رویداد زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1^\mu = (0,0) \qquad x_2^\mu = (0,a)$$
$$x_3^\mu = (b,0) \qquad x_4^\mu = (b,a)$$

که تشکیل یک مربع با مساحت ab را می دهند.در دستگاه دیگر S' این چهار نقطه تشکیل یک متوازی الاضلاع می دهند.نشان دهید مساحت این متوازی الاضلاع نیز ab است.

ازین نتیجه می گیریم عنصر حجم برای دستگاههای مختصات ناورداست.

سوال سوم:شتاب در نسبیت خاص

ناظری را در نظر بگیرید که با ویژه شتاب ثابت α در دستگاه خودش حرکت می کند.از دید ناظر ساکن تابعیت سرعت ناظر متحرک بصورت $v = \frac{\alpha t}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2 t^2}{c^2}}}$ است.ماتریس ژاکوبی تبدیلات مختصات بصورت زیر است:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial t} \\ \frac{\partial t'}{\partial x} & \frac{\partial t'}{\partial t} \end{pmatrix}$$

برای این دو ناظر دترمینان این ماتریس چیست؟در حد $\alpha \to 0$ دترمینان چیست؟

ازین مساله چه نتیجه ای می گیرید؟

سوال چهارم

دو دستگاه S و S' در پیکربندی استاندارد هستند.در S' یک میله که موازی محور x' است شروع به حرکت با سرعت u در جهت y' می کند.

زاویه میله با محور x در دستگاه S چیست؟