تمرین سری سوم نسبیت خاص - پاییز ۱۴۰۱

دکتر شانت باغرام

سوال ۱ - ۱۰ امتیاز

الف)

حرکت ذره ای با بار q و جرم m تحت میدان کولنی بار Q که جرم بسیار زیادی دارد و می‌توان از حرکت‌ش صرف نظر کرد با احتساب دینامیک نسبیتی محاسبه کنید.

ب)

آیا مسیر حالت مقید دقیقا بیضی می‌شود؟ اگر نمی‌شود و معادلات‌تان نیاز به تقریب زدن دارد تا اولین مرتبه ی تصحیح اثرات نسبیتی سرعت زاویه ای حرکت تقدیمی بیضی را محاسبه کنید.

سوال ۲ - لاگرانژی پروکا - ۲۰ امتیاز

الف)

با استفاده از معادله ی اویلر لاگرانژ برای میدان ها معادله ی حرکت متناظر با لاگرانژی پروکا را بدست آورید.

ب)

تانسور تکانه انرژی سیستم را حساب کنید.

ج)

درباره ی اثر جمله ی پروکا در تقارن پیمانه ای و جرم دار شدن فوتون فکر و مطالعه کنید و چند خط درباره اش بنویسید.

$$\mathcal{L}_{proca} = -\frac{1}{16\pi}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta} + \frac{\mu^2}{8\pi}A_\alpha A^\alpha - \frac{1}{c}J_\alpha A^\alpha$$

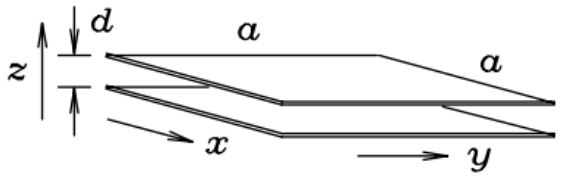
چ)

چرا تانسور انرژی تکانه را همواره متقارن تعریف می‌کنیم؟(می‌توانید بیش از یک دلیل بیاورید!) زیرا اگر $T_{ij} \longrightarrow T_{ij} + \nabla_k Y_{kij}$ این تبدیل را انجام دهیم، معادله ی پیوستگی برقرار باقی می‌ماند. که Y تانسوری از رتبه ی ۳ و تماما پادمتقارن است.

سوال ۳- ۲۰ امتیاز

الف)

از تعریف تانسور میدان، $F^{\mu\nu}$ استفاده کنید و با در نظر گرفتن تبدیل‌یافته‌ی آن، $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$، میدان‌های الکترومغناطیسی را از دید دو ناظری که یکی با خیز u_x و دیگر با خیز u_z حرکت می‌کند، بدست آورید.



شکل ۱: اطلاعات هندسی خازن.

ب)

اکنون خازن تختی را در نظر بگیرید که از دو صفحه‌ی مربعی به طول a تشکیل شده است و فاصله‌ی میان صفحات آن d است. همچنین فرض کنید بار $-Q$ بر روی صفحه‌ی بالایی و بار $+Q$ بر روی صفحه‌ی پایینی قرار گرفته است. جزئیات بیش‌تر در شکل آمده است. در هر یک از بخش‌های زیر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را بدست آورید.

- از دید ناظری که با سرعت u_x حرکت می‌کند.
- از دید ناظری که با سرعت u_z حرکت می‌کند.

سوال ۴- ۱۰ امتیاز

درباره ی آزمایش فیزو (Fizeau experiment) مطالعه کنید و با دانشی که از نسبیت خاص دارید توضیحش دهید.

سوال ۵- ۳۰ امتیاز

یک پتانسیل کپلری به شکل $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ را در نظر بگیرید. مسئله حرکت ذره ای به جرم m در این پتانسیل را به طور کامل و با استفاده از دینامیک نسبیتی مورد بحث قرار دهید. در این راستا "معادله مسیر دو بعدی در مختصات قطبی"، "مکان ذره به عنوان تابعی از زمان" ، "انرژی کل"، و "تکانه زاویه ای" را محاسبه کنید.

سوال ۶- ۳۰ امتیاز

میدان الکترومغناطیس $\vec{B}(x^\mu)$ و $\vec{B}(x^\mu)$ را در یک نقطه از فضاـزمان در نظر بگیرید. کمیت های ناوردا زیر تعریف می شوند.

$$I_1 = \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$$
$$I_2 = \frac{1}{4}{}^*\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} = -\vec{E}.\vec{B}$$

الف)

اگر $I_2 = 0$ ، $I_1 \neq 0$ باشد، بسته به علامت I_1 می توان به دستگاهی رفت که در آن یا $\vec{B} = 0$ و یا $\vec{E} = 0$.

ب)

اگر $I_2 \neq 0$ ولی $I_1 = 0$ باشد، میتوان به دستگاهی رفت که در آن $\vec{E} \propto \vec{B}$