امتحان پایان ترم نسبیت خاص-پاییز ۱۴۰۴

دانشکده فیزیک- دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ بارگذاری: چهارشنبه ۸ بهمن ۱۴۰۴- ساعت ۰۰: ۱۲ظهر

تاریخ تحویل امتحان: شنبه ۱۱ بهمن ۱۴۰۴- ساعت ۰۰: ۱۲ظهر

ارسال جواب: **baghram@sharif.edu**

- **لطفا نام، نام خانوادگی و شمارهٔ دانشجویی خود را بر روی برگه مرقوم فرمایید.**
- **امتحان شامل ۴ سوال است. لطفا هر سوال را در برگهٔ مجزا جواب دهید. امتیاز سوال‌ها به صورت زیر است:**
- **سوال یک ۱۵ امتیاز، سوال دو ۱۶ امتیاز، سوال سه ۲۰ امتیاز، سوال چهار یا پنج هر کدام را انتخاب کنید ۳۰ امتیاز دارد.**
- **کل سوالات ۸۱ نمره دارد.**
- **امتیاز میان ترم ۹ نمره پایانی را تشکیل می‌دهد.**
- **در پاسخ به پرسش‌ها لطفا نظر شخصی خود را با استدلال و در چارچوب مشخص و با تحلیل ثبت بفرمایید. استفاده از هوش مصنوعی برای پاسخ به این پرسش‌ها توصیه نمی شود. استدلال شخصی شما ارزش والاتری دارد. در صورت نیاز و انتخاب سوال ۵ برای پاسخ می توانید از منابع استفاده کنید.**

به انتخاب خود یکی از سوال های ۴ و یا ۵ را انتخاب بفرمایید و پاسخ دهید.

سوال ۱) سوال های کوتاه از نسبیت خاص! (مختصر به همراه کمینه رابطه‌ها توضیح دهید.)

الف) توضیح دهید که اصول نسبیت خاص چگونه ساختارِ علّی فضا زمان را به سه قسمت زمان گونه، فضا گونه و نورگونه تقسیم می کند.

ب) اثر کامپتون مربوط به تغییر طول موج فوتون به دلیل اندرکنش الکترومغناطیس با الکترون آزاد را با استفاده از دینامیک نسبیت خاصی توضیح دهید.

ج) برای تولید زوج ذره و پاد ذره انرژی حدی وجود دارد. این گزاره به چه ترتیبی به پایستگی چهارتکانه مرتبط است؟

د) توضیح دهید که چگونه قانون کولن و تبدیلات لورنتس می توانند معادل با قانون آمپر باشند. به بیان دیگر شرح دهید که چگونه مغناطیس نمود تبدیلات لورنتسی میدان الکتریکی است؟

د) آزمایش اپتیکی را نام ببرید و توضیح دهید که با نسبیت خاص قابل فهم است.

سوال ۲) میدان کلاسیک و الکترودینامیک

یک نظریه‌ی مهم میدان کلاسیک، نظریه الکترودینامیک است. لاگرانژی الکترودینامیک به صورت زیر است:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu$$

که A_μ چهاربردار پتانسیل و J^μ چهاربردار جریان است و $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ تانسور شدت الکترومغناطیس است.

الف) ابتدا نشان دهید که J^μ چاربردار است.

ب) با استفاده از معادلات ماکسول و تعریف پتانسیل های اسکالر و برداری نشان دهید که A_μ چاربردار است.

راهنمایی:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

پتانسیل های اسکالر و برداری به صورت زیر به میدان ها ارتباط دارند.

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

ج) نشان دهید که معادلات اویلر - لاگرانژ برای لاگرانژی الکترودینامیک همان معادلات ماکسول را به دست می دهند.

د) با استفاده از تعریف چاربردار نیروی الکترومغناطیس به صورت زیر قسمت فضایی این رابطه را به دست آورید.

$$\frac{dP^\mu}{d\tau}=F^{\mu\nu}u_\nu$$

که در رابطه فوق τ زمان ویژه u_ν چاربردار سرعت است.

سوال ۳) ذرات بنیادی و نسبیت خاص

مزون ها mesons جز ذرات ترکیبی طبیعت هستند که از در کنار هم قرار گفتن یک کوارک و پادکوارک شکل می گیرند یکی از مشخصات این ذرات نیمه عمر بسیار کوتاه آن ها است که بازه زمانی از مرتبه 10^{-8} تا 10^{-16} ثانیه دارد. (توجه کنید که پروتون و نوترون که از ترکیب سه کوارک تشکیل می شوند در خانواده باریون baryon ها قرار دارند).

دو نمونه از این مزون ها را در دستگاه لختی اندازه گیری کرده ایم. انرژی ذره اول برابر با ۱۷۵ MeV و تکانه آن ۱۰۵ MeV/c است و انرژی ذره دوم برابر با $225\ MeV$ و تکانه ۱۸۰ MeV/c است.

الف) جرم سکون ذره یک و دو را به دست آورده و نوع آن را مشخص کنید.

ب) سرعت ذره اول را به دست آورید.

ج) انرژی جنبشی ذره دوم را به دست آورید .

د) بیشترین تکانه ای را که نسبیت خاص اجازه می دهد برای این ذرات داشته باشید، چقدر است؟

Particle	Symbol	Anti-particle	Makeup	Rest mass MeV/c^2	S	C	B	Lifetime	Decay Modes
Pion	π^+	π^-	ud	139.6	0	0	0	2.60 x10^{-8}	$\mu^+\nu_\mu$
Pion	π^0	Self	$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$	135.0	0	0	0	0.83 x10^{-16}	2γ

ه) واکنش مهم دیگری که در سرن می تواند رخ دهد واپاشی بوزون هیگز به جرم ۱۲۵ GeV به دو فوتون $h\rightarrow\gamma+\gamma$ است. ذره هیگز آخرین جز مدل استاندارد ذرات است که در سال ۲۰۱۲ در سرن کشف شد، این ذره ارتباط عمیقی با جرم دار بودن ذرات بنیادی دارد .حال فرض کنید که یکی از فوتون های خروجی دارای طول موج فمتومتر باشد، زاویه ی این فوتون خروجی را با راستای حرکت هیگز به دست آورید. توجه داشته

باشید که جرم ذرات بنیادی مانند هر کمیت فیزیکی دیگری که اندازه گیری می شود دارای خطای آماری و سیستماتیک است که برای سادگی از ذکر آن صرف نظر شده است. به طور مثال جرم هیگز که توسط دو آشکارساز CMS و ATLAS به دست آمده است به صورت زیر است:

$$m_h = 125.09 \pm 0.21\ (\text{stat.}) \pm 0.11\ (\text{syst.})\ \text{GeV}/c2(\text{CMS} + \text{ATLAS})$$

به انتخاب خود یکی از سوال های ۴ و یا ۵ را انتخاب بفرمایید و پاسخ دهید.

سوال ۴) گزارشی از کتاب جکسون! (کتاب در سامانه cw بارگذاری شده است)

گزارشی از بخش ۱۲/۱۰ کتاب الکترودینامیک جکسون در ارتباط با تانسور انرژی – تکانه را کمینه در ۵ صفحه آماده بفرمایید.

سوال ۵) کیهان‌شناسی و نسبیت خاص

در این سوال قصد داریم قدم به قدم ناوردایی کمیتی را به دست آوریم که فیزیک تابش جسم سیاه را در دو دستگاه لخت به دست دهد:

۵-۱) با توجه به تعریف ۴-تکانه به صورت، $p^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau}$ که m_0 جرم سکون ذره، dx^μ چاربردار دیفرانسیلمکان و $d\tau$ دیفرانسیل زمان همراه است. مولفه صفرم، ۴-تکانه را بر حسب جرم سکون ذره و تکانه قسمت فضایی به دست آورید. در فیزیک نظری، معمول است که به ذراتی که درمعادله حرکت $p^\mu p_\mu = const$ حرکت می کنند On Shell گویند. منظور از Shell پوسته ای با جرم ثابت است. نشان دهید که این لایه ها مربوط به مکان هندسی جرم ثابت در فضای انرژی و تکانه فضایی ذره است.

۵-۲) دستگاه S و S' دو دستگاه لخت هستند که با سرعت ثابت $\beta = \frac{v}{c}$ نسبت به یکدیگر در جهت محور z حرکت می کنند. ارتباط بین چار بردار تکانه را در دستگاه S و S' به دست آورید.

۵-۳) در این قسمت سوال رابطه تبدیل بین حجم تکانه فضایی در دستگاه S ($d^3p = dp_1 dp_2 dp_3$ که dp_i دیفرانسیل تکانه خطی در جهت $\hat{\imath}$ است) را با حجم تکانه فضایی در دستگاه S' ($d^3p' = dp'_1 dp'_2 dp'_3$ که dp'_i دیفرانسیل تکانه خطی در جهت $\hat{\imath}$ در دستگاه جدید است) را به دست آورید و نشان دهید که رابطه تبدیل برابر است با:

$$d^3p' = \frac{p^{0'}}{p^0} d^3p$$

راهنمایی ۱ : برای این تبدیل می توانید از دترمینان ماتریس ژاکوبی استفاده کرد.
راهنمایی ۲ : باید توجه داشته باشید که مولفه صفرم تکانه تابعی از مولفه قسمت فضایی می باشد.
راهنمایی ۳: شکل کلی ماتریس تبدیل خیز با جهت دلخواه $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ به صورت زیر است.

$$\Lambda_{bosst} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

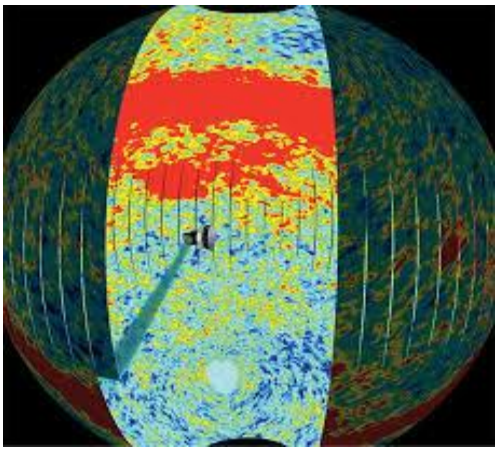
۵-۴) با استفاده از نتیجه به دست آمده از سوال قبل که

$$d^3x' = \frac{p^0}{p'^0} d^3x$$

نشان دهید که حجم فضای فاز $d^3x d^3p$ یک کمیت لورنتس ناوردا است. در ادامه استدلال کنید که چگالی فضای فاز که برابر است با تعداد ذرات در فضای فاز کمیت لورنتس ناوردا می باشد. شرط لازم برای ناوردایی

$f = \frac{number}{d^3x d^3p}$ چیست؟

۵-۵) فرض کنید شما در مرکز یک کره ای قرار گرفته باشید. که سطح کره تابش یکنواخت جسم سیاهی با دمای T داشته باشید. فوتون های حاصل از این پوسته از هر جهت مطابق شکل زیر به سمت شما می آید.



حال فرض کنید که شما تصمیم می گیرید که با سرعت $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ به یک جهت از این کره که سطح آن تابش با دمای ثابت دارد حرکت کنید.

۶-۵) ابتدا با انتخاب دستگاه مختصات مناسب به طوری که دستگاه ساکن مرتبط با کره و شما را در پیکربندی استاندارد قرار دهد نشان دهید که فوتون های که از روبرو به شما می رسند به خاطر اثر داپلر فرکانس بیشتری نسبت به فوتون های که از پشت به شما می رسند، دارند.

این نتیجه را می توانید به صورت دقیق تر با رابطه زیر نشان دهید:

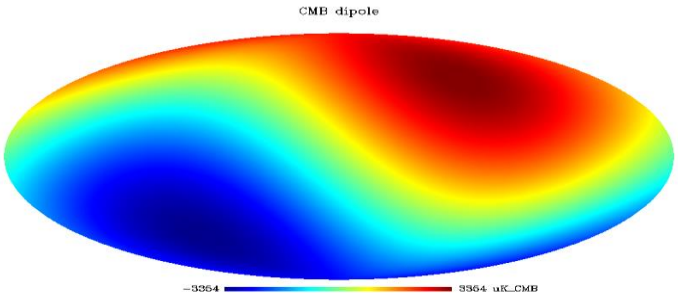
$$\nu_{int} = \gamma(1 - \beta cos\theta)\nu_{obs}$$

که $\nu_{\rm obs}$ *فرکانس مشاهده شده و* $\nu_{\rm int}$ *فرکانس ذاتی فوتون های گسیل شده از سطح کره می باشد.* θ *زاویه ای است که جهت فوتون ورودی با سرعت شما درست می کند. آیا می توانید علامت منفی و حضور* $cos\theta$ *را در رابطه فوق توجیه کنید.*

** سوال های فوق را که حل کرده اید، به شما کمک خواهند کرد که مسئله واقعی را حل کنید. کره ای که سطح آن تابش جسم سیاه انجام می دهد، متناظر تابش زمینه کیهان است. تابشی که از فوتون های کیهان اولیه به ما می رسد. از آن جایی که ما (گروه محلی کهکشان ها) با سرعت

$v = 369.0 \pm 0.9$ km/s, به سمت تابش زمینه حرکت می کنند اثر دو قطبی دمایی را به اندازه

$T \simeq 3.355 \pm 0.008$ mK بر روی تابش زمینه مشاهد می کند. الگوی این دو قطبی دمایی در نقشه مسطح از این کره به شکل زیر است:



طیف تابش جسم سیاه تابش پس زمینه کیهان ، طیف جسم سیاه است که شدت ویژه آن به شکل زیر داده می شود:

$$I_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}} - 1}$$

که I_ν شدت ویژه specific intensity می باشد که برابر با میزان انرژی دریافتی در بازه فرکانسی $(\nu, \nu + d\nu)$ در زاویه فضایی $d\Omega$ که از سطح نرمال به جهت رسیدن فوتون ها $dA_\perp$ و در زمان dt به ما می رسد. h ثابت پلانک، T دمای جسم سیاه تابش زمینه کیهان و k_B ثابت بولتزمان است.

۵-۷) با توجه به تعریف شدت ویژه و این نتیجه مهم که در سوال های قبل به دست آوردید که حجم فضای فاز d^3xd^3p ناوردا است. نشان دهید که کمیت زیر لورنتس ناوردا است.

$$\frac{I_\nu}{\nu^3} = Lorentz\ \ Invariant$$

۵-۸) در ادامه با این فرض که گروه محلی یک ناظر لخت و تابش زمینه کیهان ناظر لخت دیگری است. نشان دهید که شدت ویژه تابش زمینه کیهان برای ما به صورت زیر به دست می آید. که این شدت سازگار با تابش جسم سیاه با یک دمای جدید است:

$$I'_\nu(T) = \frac{2h\nu'^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu\prime}{k_BT\prime}} - 1}$$

که پرایم نشان دهنده کمیت های مشاهده شده در دستگاه ناظر لخت مربوط به ما می باشد.

۵-۹) نشان دهید که دمای جدید به صورت زیر تعریف می شود:

$$T'(\widehat{n'}) \simeq \frac{T(\widehat{n'})}{\gamma(1 - \beta cos\theta')}$$

به نظر می رسد که تابش زمینه کیهان راهنمایی است برای تعریف تبدیلات لورنتس برای مفهوم ترمودینامیکی دما

۵-۱۰) آیا جز اثر داپلر اثر دیگرنسبیت خاصی وجود دارد که تابش زمینه کیهان را دچار اختلال کند؟

با احترام-شانت باغرام

"I think it's rarely about what you actually learn in class . . . it's mostly about things that you stay motivated to go and continue to do on your own."

Maryam Mirzakhani press conference after winning Field's Medal | August 2014