□ قضیه نوتر

نظریه میدان های کلاسیک علی الاصول می توانستند تقارن نداشته باشند، ولی نظریه های جالبی را که می شناسیم حتما تقارن هایی شبیه تقارن در انتقال، دوران، لورنتس یا تقارن های پیمانه‌ای (درونی) نیز دارند. تقارن ها در نظریه میدان اهمیت زیادی دارند و با کمیت های پیوسته ارتباط دارند.

از این رو لازم شده است که قضیه نوتر (1882-1935) Emmy Noether را در چارچوب نظریه میدان بررسی کنیم.

قضیه نوتر می گوید که برای هر تقارن پیوسته لاگرانژی یک جریان پیوسته $J^\mu(x)$ وجود دارد که معادله حرکت

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

باعث می شود که

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \qquad (1)$$

که شکل بسط داده رابطه پیوستگی جریان $\frac{dJ^0}{dt} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ است. در میدان کوانتومی، ممکن است که بعضی از روابط پیوستگی جریان غیر صفر باشد. به این مورد "anomalies" می گویند.

برای هر جریان پایسته یک کمیت پایسته (global) بار Q وجود دارد.

$$Q = \int_{R^3} d^3x\, J^0 \qquad (2)$$

مشتق زمانی کامل Q را برابر صفر خواهد بود.

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{R^3} d^3x\, \frac{dJ^0}{dt} = -\int_{R^3} d^3x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{J} \qquad (3)$$

2,

که رابطه (3) درست است با این فرض که J در $|x| \to \infty$ به شدت صفر شود.

توجه داشته باشید که پایستگی J^μ محکم‌تر از پایستگی بار Q است. زیرا بار به صورت موضعی پایسته است اگر بار را بر روی ناحیه V می‌سنجیم.

$$Q_V = \int_V d^3x\, J^0 \quad \to \quad \frac{dQ_V}{dt} = -\int_V d^3x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\oint_S d\vec{S}\cdot\vec{J} \tag{4}$$

قانون گاوس

$$d\vec{S} = \hat{n}\, dS$$

بردار عمود بر سطح

مساحت سطح

اثبات قضیه:

برای بررسی قضیه نوتر فرض می‌کنیم.

$$\phi_a \to \phi_a + \delta\phi_a \tag{5}$$

انتقال افزایشی میدان را در نظر بگیرید. در صورتی که لاگرانژی با یک مشتق کامل تغییر کند.

$$\delta\mathcal{L}(\phi_a) = \partial_\mu J^\mu(\phi_a) \tag{6}$$

برای مجموعه توابع J^μ. با توجه به معادله وردش لاگرانژی خواهیم داشت.

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right)\right]\delta\phi_a + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right) \tag{7}$$

در صورتی که معادله حرکت برقرار باشد. ترم داخل براکت صفر است

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right) = 0$$

در نتیجه معادله (6) تبدیل می‌شود به

$$\partial_\mu J^\mu = \delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a\right) \tag{8}$$

در این صورت خواهیم داشت. $\partial_\mu J^\mu = 0$ که

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\delta\phi_a - \mathcal{J}^\mu \tag{9}$$

توجه داشته باشید که در صورتی که لاگرانژی تحت انتقال $\delta\phi_a = 0$ باشد در این صورت $\delta\mathcal{L} = 0$ در این صورت می‌شود

$$\mathcal{J}^\mu = 0 \rightarrow J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\delta\phi_a \tag{10}$$

نکته مهم دیگر که این کمیت پیوسته (پایسته) به تقارن پیوسته مرتبط است. تقارن گسسته همانند پاریته جریان نوتر ندارند.

□ تانسور انرژی-تکانه

اگر به یاد داشته باشیم، جابه‌جایی در زمان، و پایستگی سیستم، معادل کمیت پایسته انرژی بود.
جابه‌جایی در مکان و عدم تغییر سیستم معادل پایستگی تکانه است.
حال سؤال این است که پایستگی در لاگرانژی به عنوان چه کمیت پایسته است؟

$$x^\nu \rightarrow \underbrace{x^\nu - \varepsilon^\nu}_{\text{جابه‌جا در فضا-زمان}} \Rightarrow \phi_a(x) \rightarrow \phi_a(x+\varepsilon) = \phi_a(x) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi_a(x) \tag{11}$$

active transformation

passive transformation

اگر لاگرانژی به صورت صریح به مکان ارتباط نداشته باشد، بستگی آن از تغییر ϕ است. در نتیجه

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \epsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L} \tag{12}$$

از آن جایی که تغییر از جنس مشتق کامل است. می‌توانیم از قضیه نوتر استفاده کنیم که 4 کمیت پایسته را به شکل زیر می‌دهد.

(13) $$T^{\mu}{}_{\nu} = (J^{\mu})_{\nu}$$

ν: for each of translation

$\nu = 0,1,2,3$

با توجه به تعاریف (11)، (12) خواهیم داشت.

(14) $$T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_a)}\partial_{\nu}\phi_a - \delta^{\mu}{}_{\nu}\mathcal{L}$$

energy-momentum tensor ~ (Stress-energy) tensor

رابطه فوق به تعریف تانسور انرژی-تکانه است که دارای بعد $[T^{\mu}{}_{\nu}] = L^{-4}$ در رابطه پایستگی زیر صدق می‌کند.

(15) $$\partial_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} = 0$$

چهار بار پایسته & "Conserved charge" به صورت زیر تعریف می‌شود

(16) $$P^{\mu} = \int d^3x \, T^{0\mu}$$

مولفه زمانی P^{μ} برابر است با

(17) $$P^0 = \int d^3x \, T^{00} = \int d^3x \, \underbrace{(\pi^a \dot{\phi}_a - \mathcal{L})}_{H}$$

در نتیجه P^0 انرژی کل پایسته است. در نتیجه در نظریه میدان کلاسیک پایستگی انرژی از پایسته بودن سیستم تحت انتقال در زمان به دست می‌آید. و به طور مشابه

(18) $$P^i = \int d^3x \, T^{0i} = -\int d^3x \, \pi^a \partial_i \phi_a$$

که P^i تکانه میدان است.

حال لاگرانژی میدان اسکالر $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$ را درنظر داشته باشید.

$\pi = \dot{\phi}$ ، Conjugate-momentum تکانه متمم

(19) $$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V$$

گرادیان همستی ، پتانسیل همستی در حالت کلی

حال تانسور انرژی-تکانه بصورت زیر است.

(20) $$T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)}\partial_\nu \phi_a - \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L}$$

(21) $$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \phi) - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\rho \phi)^2 + \eta^{\mu\nu}V$$

نکته جالب این که تانسور انرژی-تکانه متقارن است $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

حال می‌توانیم P^0 را محاسبه کنیم

(22) $$P^0 = \int d^3x\, T^{00} = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V\right) = \int d^3x\, \mathcal{H} = H$$

به این ترتیب انرژی میدان کلاسیک پایسته است.