1,

Special Relativity

Fall 2020

lecture Note 20

گروه لورنتس و اثر تقدمی توماس / نسبیت خاص

پاییز ۱۳۹۹

درس نامه ۲۰

نشان دادیم که گروه لورنتس را می‌توانیم برحسب مولدهای خیز و دوران به صورت زیر بنویسیم

(1)
$$\Lambda = e^{L} = e^{-\vec{\omega}\cdot\vec{S} - \vec{\zeta}\cdot\vec{K}}$$

که $\vec{S}$ مولدهای دوران است و $\vec{K}$ مولد خیز.

مولدهای دوران و خیز را از پایستگی طول فضا-زمان در دو دستگاه بدست آوردیم. بدین ترتیب که

(2) $ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx'^{\mu} dx'^{\nu}$ $\Rightarrow$ $ds'^2 = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\ \sigma} \Lambda^{\nu}_{\ \lambda} dx^{\sigma} dx^{\lambda}$

تبدیل لورنتس + $dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \sigma} dx^{\sigma}$

$dx'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\ \lambda} dx^{\lambda}$

$ds'^2 = ds^2 = \eta_{\sigma\lambda} dx^{\sigma} dx^{\lambda}$

* Λ شامل تمام تبدیلات همگن است که طول فضا-زمان را ناوردا باقی می‌گذارد.

در نتیجه
$$\boxed{\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\ \sigma} \Lambda^{\nu}_{\ \lambda} = \eta_{\sigma\lambda}} \quad (1)$$

رابطه (۱) به شکل ماتریسی به صورت
$$\Lambda^{T} \eta \Lambda = \eta \quad (2)$$
می‌باشد.

حال گروه لورنتس با فرض $\det \Lambda = +1$ می‌باشد (تبدیلات همگن با سرعت ثابت)

با فرض $\Lambda = e^{L}$ (گروه لی) خواهیم داشت:

(3)
$$\det A = \det(e^{L}) = e^{\mathrm{Tr}\, L}$$

پس مولدهای گروه لورنتس بدون رد هستند $\mathrm{Tr}\, L = 0$

so $\det A = +1$ $\Rightarrow$ نتیجه می‌شود

حال از رابطه ماتریسی (۱) استفاده می‌کنیم

(4)
$$\Lambda^{T} \eta \Lambda = \eta \xrightarrow[\times \eta]{} \eta \Lambda^{T} \eta \Lambda = \eta^2 = I$$

$$\eta\Lambda^T\eta\Lambda = I \xrightarrow{\text{با استفاده از تعریف ماتریس معکوس}} \eta\Lambda^T\eta = \Lambda^{-1} \quad (۲)$$

حال با توجه به روابط

$$(5)\quad \begin{cases} \Lambda^T = e^{L^T} \\ \eta\Lambda^T\eta = e^{\eta L^T\eta} \\ \Lambda^{-1} = e^{-L} \end{cases}$$

با جایگذاری در رابطه (۲) خواهیم داشت

$$(6)\quad e^{\eta L^T\eta} = e^{-L} \Rightarrow \eta L^T\eta = -L$$

در نتیجه برای مولدها رابطه روبرو برقرار خواهد بود

با توجه به این که

$$\eta = \eta^T \xrightarrow{\times\eta} \underbrace{\eta^2}_{1} L^T\eta = -\eta L \Rightarrow (\eta L)^T = -\eta L$$

نتیجه بسیار مهم این که ηL ماتریس پادمتقارن است. در نتیجه ماتریس L را به صورت زیر می‌نویسیم

$$(7)\quad L = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ \hline L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{array}\right)$$

مربوط به خیز

ماتریس ۳×۳ مربوط به گروه دوران

مولدهای گروه لورنتس را به ۳ مولد دوران S_i و ۳ مولد خیز به صورت زیر است

$$[S_i]_{jk} = -\epsilon_{ijk} \qquad K_i = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1_{0i}\ 0\ 0 \\ \hline 1_{0i} & \\ 0 & \vec{0} \\ 0 & \end{array}\right) \quad (8)$$

حال تبدیلات لورنتس را می‌توان به صورت زیر نوشت

(9)
$$\Lambda = e^{L} = e^{-\vec{w}\cdot\vec{S} - \vec{\zeta}\cdot\vec{K}}$$

بردار زوایای ۳ تایی

مولدهای دوران

مولدهای خیز

خیز $\vec{\beta} = \tanh\zeta\,\hat{\beta}$

خیز در جهت دلخواه با بردار $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ و دوران $w = 0$

(10)
$$A_{boost}(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\beta_2\beta_3/\beta^2 \\ -\gamma\beta_3 & \frac{(\gamma-1)\beta_3\beta_1}{\beta^2} & (\gamma-1)\beta_2\beta_3/\beta^2 & 1+(\gamma-1)\beta_3^2/\beta^2 \end{pmatrix}$$

حال مولدهای خیز و دوران در روابط جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند.

(11)

$$[S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk} S_k$$
۱- روابط جابه‌جایی مربوط به تکانه زاویه‌ای

$$[S_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k$$
۲- مولد خیز تحت دوران مانند بردار رفتار می‌کند

$$[K_i, K_j] = -\varepsilon_{ijk} S_k$$
۳- خیزها با یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند.

ساختار جابه‌جاگرهای بالا ساختار گروه لورنتس $O(3,1)$ را نشان می‌دهد.

روابط جابه‌جایی که نوشتیم اثرات بسیار عمیق دارد. این روابط جابه‌جایی نشان می‌دهد که دو تبدیل لورنتس پشت سرهم معادل هستند با یک تبدیل لورنتس + دوران

یکی از مهمترین مشاهدات در مورد عدم جابه‌جایی مولدهای دو لورنتس اثر تقدیمی توماس است.

دو مشاهده مهم اثر زیمان ناهنجار (anomalous Zeeman) و اثر ساختار ظریف (fine Structure) عمدتاً به اثرات سینماتیک نسبیتی بستگی دارد.

این اثر مربوط به دو قطبی مغناطیسی است که توسط Uhlenbeck Goudsmit در سال ۱۹۲۶ مطرح شده

دستگاه تحت بررسی (به خاطر شتاب الکترون) توسط L. H. Thomas در سال ۱۹۲۷ بررسی شد

اثر توماس شکل این ضریب مورد نیاز زیمان ناهنجار و ساختار ظریف را توضیح می‌دهد.

الکترون با اسپین $\vec{s}$ که در جهت یک محور می‌تواند کوانتومی باشد و مقدار $\pm \frac{\hbar}{2}$ را به خود بگیرد.

دارای ممان مغناطیسی $\vec{\mu}$ است.

$$\vec{\mu} = g \frac{e}{2mc} \vec{s} \qquad (12)$$

که $g = 2$

فرض کنید الکترون با سرعت $\vec{v}$ در میدان الکتریکی و مغناطیسی خارجی $\vec{B}, \vec{E}$ حرکت کند. معادله حرکت برای اندازه حرکت در دستگاه سکون الکترون برابر خواهد بود.

$$\left.\frac{d\vec{s}}{dt}\right|_{\text{دستگاه سکون ذره}} = \vec{\mu} \times \underbrace{\vec{B}'}_{\text{میدان مغناطیسی در دستگاه سکون ذره}} \qquad (13)$$

ارتباط بین میدان مغناطیسی در دو دستگاه عبارت است

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \vec{V} \times \vec{E}\right) \qquad (14)$$

حال اگر از ترم β^2 صرف نظر کنیم

$$\left.\frac{d\vec{s}}{dt}\right|_{rest\ frame} = \vec{\mu} \times (\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}) \qquad (15)$$

که $\gamma \simeq 1$ و علامت 1 را حذف کرده‌ایم. $c=1$

این رابطه معادل است با انرژی اندرکنش

$$U' = -\vec{\mu}_\circ \cdot (\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}) \qquad (16)$$

در اتم نیروی الکتریکی با تقریب خوبی از گرادیان پتانسیل مرکزی بدست می‌آید.

$$e\vec{E} = -\frac{\vec{r}}{r}\frac{dV}{dr} \qquad (17)$$

و

e را دوباره بنویسیم

در نتیجه انرژی اندرکنش اسپین برابر خواهد بود.

$$U' = -\frac{ge}{2mc}\vec{s}\cdot\vec{B} + \frac{g}{2mc^2}\left(\vec{s}\cdot(\vec{r}\times\vec{v})\right)\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} \qquad (18)$$

از این ترم می‌توان اندازه حرکت زاویه مداری الکترون را بدست آورد.

$$U' = \underbrace{-\frac{ge}{2mc}\vec{s}\cdot\vec{B}}_{\text{اثر ناهنجار زیمان}} + \underbrace{\frac{g}{2m^2c^2}}_{\text{اثر ساختار ظریف}}(\vec{s}\cdot\vec{L})\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} \qquad (19)$$

که با آزمایش توافق دارد

که ۲ برابر آزمایش است.

این عدم تطابق در محاسبه و آزمایش بخاطر این بوده که تحول معادلات گشتاور نشده

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \underbrace{\vec{\mu}\times\vec{B}}_{\text{دستگاه مختصات سکون الکترون چرخش دارد.}} \qquad (20)$$

در نتیجه برای هر بردار در دستگاه مختصات چرخان

$$\left.\frac{d\vec{G}}{dt}\right|_{\text{Non-Rotating}} = \left.\frac{d\vec{G}}{dt}\right|_{\text{rest}} + \underbrace{\vec{W}_T}_{\text{سرعت زاویه ای چرخش دستگاه}} \times \vec{G} \qquad (21)$$

"Goldstein page 174"

حال این عبارت فوق را برای الکترون بنویسیم

$$\left.\frac{d\vec{s}}{dt}\right|_{\text{Non-Rotating}} = \vec{\mu} \times \vec{B}' + \vec{W}_T \times \vec{S} \qquad (22)$$

$$\left\{ \vec{\mu} = \frac{ge}{2mc}\vec{S} \right. \Rightarrow \left.\frac{d\vec{s}}{dt}\right|_{\text{Non-Rot}} = \vec{S} \times \left(\frac{ge\vec{B}'}{2mc} - \vec{W}_T \right) \qquad (23)$$

در نتیجه انرژی اندرکنش برابر خواهد بود

$$U = U' + \vec{S} \cdot \vec{W}_T \qquad (24)$$

که

$$U' = -\frac{ge}{2mc}\vec{S} \cdot \vec{B} + \frac{g}{2m^2c^2}(\vec{S} \cdot \vec{L})\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} \qquad (25)$$

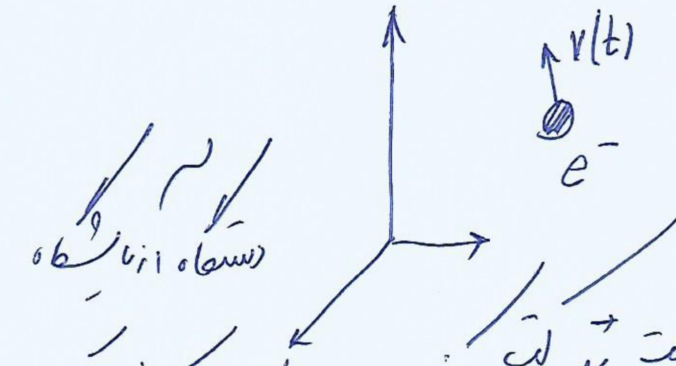
سؤال چیست $\vec{\omega}_T$ (سرعت زاویه ای توماس) که الکترون به خاطر حرکت در اتم دارد!

حال تبدیلات لورنتس را اعمال می‌کنیم نشان خواهیم داد که چگونه دو تبدیل لورنتس معادل با تبدیل لورنتس با یک دوران است.

در زمان t

$$\underbrace{x'}_{\text{دستگاه سکون الکترون}} = A_{\text{boost}}(\vec{\beta})\,\underbrace{x}_{\text{دستگاه آزمایشگاه}} \qquad (26)$$

ریشهٔ فرکانس تقدیمی توماس ω_T، در شتابی است که الکترون در میدان خارجی احساس می‌کند.



فرض کنید که الکترون در دستگاه آزمایشگاه با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کند. دستگاه سکون الکترون از پشت هم قرار دادن مجموعه‌ای از مختصات همراه که "rest frame of coordinate" "a comoving sequence of inertial frames" به دست می‌آید.

سرعت‌ها در زمان t ، $t+\delta t$ در دستگاه آزمایشگاه به صورت زیر باشد.

$$v(t) = c\beta \quad ; \quad v(t+\delta t) = c(\beta+\delta\beta) \tag{27}$$

ارتباط بین مختصات مختصه آزمایشگاه x (بدون پریم) و مختصه همراه الکترون به صورت زیر است.

$$\underset{\text{همراه در زمان } t}{x'} = A_{boost}(\beta)\,\underset{\text{آزمایشگاه}}{\vec{x}} \tag{28}$$

و در زمان $t+\delta t$ مختصه همراه را با x'' نشان می‌دهیم.

$$\underset{\text{همراه در زمان } t+\delta t}{x''} = A_{boost}(\beta+\delta\beta)\,x \tag{29}$$

توجه داشته باشید که روابط فوق فقط خیز خالص می‌باشند. حال آن چه مورد توجه ماست، ارتباط بین دستگاه همراه الکترون در زمان t, $t+\delta t$ به عبارت دیگر تحول زمانی این مختصه است. به بیان دیگر ما به دنبال ارتباط بین مختصه x' در زمان t و x'' در زمان $t+\delta t$ هستیم.

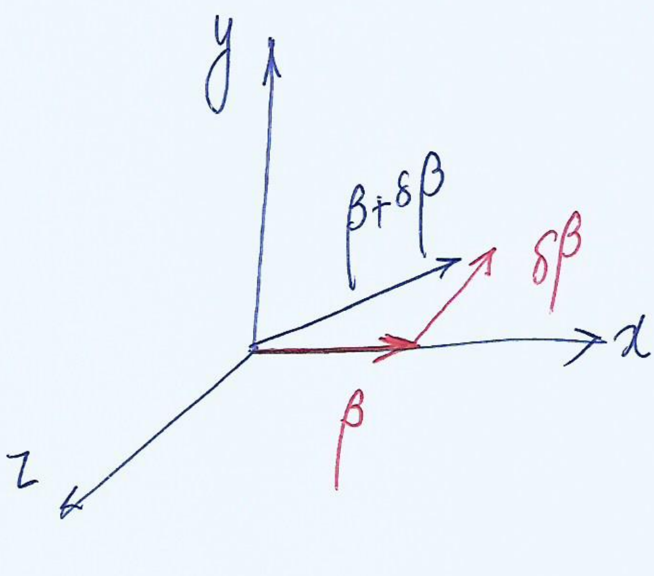
$$x'' = \underset{\text{ماتریس تبدیل}}{A_T}\, x' \Rightarrow \left\{ x'' = \underbrace{A(\beta+\delta\beta)\underbrace{A^{-1}(\beta)\, x'}_{x}}_{x''} \right. \tag{30}$$

$$A_T = A_{boost}(\beta+\delta\beta)\, A^{-1}_{boost}(\beta) \tag{31}$$

درنتیجه

$$A_T = A_{boost}(\beta+\delta\beta)\, A_{boost}(-\beta) \tag{32}$$

برای اینکه این مسئله را به سادگی حل کنیم، پیکربندی را انتخاب می‌کنیم که مسئله را ساده کند. $\vec{\beta}$ در راستای x و $\beta+\delta\beta$ در صفحه xy باشد. (همانند شکل زیر)



و شکل کلی ماتریس خیزه بصورت زیر است.

$$\text{(34)}\quad A_{boost}(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ & \text{متقارن} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ & & & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

با توجه به شکل ساده انتقالی داریم

$$\text{(35)}\quad A_{boost}(-\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

همچنین با استفاده از ماتریس (10) و نگه داشتن جملات متناسب $\delta\beta$

$$\text{(36)}\quad A_{boost} = A_{boost}(\beta+\delta\beta) = \begin{pmatrix} \gamma+\gamma^3\beta\,\delta\beta_1 & -(\gamma\beta+\gamma^3\delta\beta_1) & -\gamma\beta_2 & 0 \\ & \gamma+\gamma^3\beta\,\delta\beta_1 & \frac{(\gamma-1)}{\beta}\delta\beta_2 & 0 \\ & \text{متقارن} & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

که $\dot{A}$ از بسط تیلور به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\gamma(\beta+\delta\beta) = \gamma(\beta)\Big|_{\delta\beta=0} + \frac{\partial\gamma}{\partial\beta}\,\delta\beta \qquad (37)$$

10

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \rightarrow d\gamma = -\tfrac{1}{2}(-2\beta)(1-\beta^2)^{-3/2}$$

(38) $$\frac{d\gamma}{dt} = \beta\gamma^3$$

در نتیجه $$\gamma(\beta+\delta\beta) = \gamma(\beta) + \gamma^3\beta\,\delta\beta_1$$

در جهت محور x

برای جمله A^0_1 خواهیم داشت.

(39)

$$-A^0_1 = \gamma(t+\delta t)\beta(t+\delta t) = \gamma(\beta+\delta\beta)\times(\beta+\delta\beta)$$

$$= \left(\gamma(\beta) + \frac{d\gamma}{d\beta}\delta\beta\right)(\beta+\delta\beta) = \gamma\beta + \beta\frac{d\gamma}{d\beta}\delta\beta + \gamma\delta\beta$$

$$= \gamma\beta + \gamma^3\beta^2\delta\beta_1 + \gamma\delta\beta = \gamma\beta + \gamma\delta\beta\left(\frac{\beta^2}{1-\beta^2}+1\right)$$

$$-A^0_1 = \gamma\beta + \gamma^3\delta\beta$$

توجه به اندیس 1 و 2 به معنای جهت x و y داشته باشید. حال A_T به راحتی به دست می‌آید.

(40) $$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma^2\delta\beta_1 & -\gamma\delta\beta_2 & 0 \\ -\gamma^2\delta\beta_1 & 1 & \left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 0 \\ -\gamma\delta\beta_2 & -\left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حال با توجه به تولید ماتریس های S و K داریم:

(41)

پادها سی

$$S_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad S_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$S_3 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad K_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$K_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 1 & & \vec{O} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad K_3 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \vec{O} & \\ 1 & & & \end{array}\right)$$

(42)

$$A_T = \mathbb{1} - \left(\frac{\gamma - 1}{\beta^2}\right)\left(\vec{\beta} \times \delta\vec{\beta}\right) \cdot \vec{S} - \left(\gamma^2 \underbrace{\delta\beta_{\parallel}}_{\text{مولفه موازی با } \vec{\beta}} + \gamma \underbrace{\delta\beta_{\perp}}_{\text{مولفه عمود بر } \vec{\beta}}\right) \cdot \vec{K}$$

تا مرتبه اول $\delta\beta$ ، A_T را می‌توان به صورت زیر نوشت.

(43)

$$A_T = A_{boost}(\Delta\beta)\, R(\Delta\Omega)$$

که کمیت های A_{boost} ، R به صورت زیر تولید می‌شود.

12/

(44) $$A_{boost}(\Delta\beta) = I - \underset{=}{\Delta\beta} \cdot \vec{K}$$

(45) $$R(\Delta\Omega) = I - \underset{=}{\Delta\Omega} \cdot \vec{S}$$

(46) $$\Delta\beta = \gamma^2 \, \delta\beta_{\parallel} + \gamma \, \delta\beta_{\perp}$$

(47) $$\Delta\Omega = \left(\frac{\gamma - 1}{\beta^2}\right) \vec{\beta} \times \delta\vec{\beta} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1} \vec{\beta} \times \delta\vec{\beta}$$

نتیجه مهم: بوست محض $x'' = A_{boost}(\beta + \delta\beta)x$، با سرعت $c(\beta + \delta\beta)$ معادل است

با یک بوست $x' = A_{boost}(\beta)x$ با سرعت $c\beta$ و یک تبدیل لورنتس شامل یک بوست با سرعت $c\Delta\beta$

و یک دوران به زاویه $\Delta\Omega$.

(48) $$A_{boost}(\beta + \delta\beta) = \underbrace{A_T}_{\text{lorentz (boost + rotation)}} A_{boost}(\beta)$$

حالا برگردیم به دستگاه همراه rest-frame - الکترون!

برای محاسبه تقدم از حسن $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{rest-frame} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ ، دوست داریم به دستگاه‌های لخت
در ادامه یکدیگر غیرچرخشی باشند.

به طور مثال وضعیت دستگاه لخت در زمان $t+\delta t$ باید غیر با شرایط $A_{boost}(\Delta\beta)$
به جای A_T به موقعیت دستگاه در زمان t ارتباط داشته باشد.
از این رو مختصه جدیدی تعریف می‌کنیم x''' به قسمی که

$$x''' = A_{boost}(\Delta\beta)\, x' \qquad (49)$$

حال با استفاده از
خواهیم داشت.

$$\begin{cases} A_T = A_{boost}(\Delta\beta)\, R(\Delta\Omega) \\ A_T = A_{boost}(\beta+\delta\beta)\, A_{boost}(-\beta) \\ x' = A_{boost}(\beta)(x) \end{cases} \qquad (50)$$

(51)

$$x''' = A_{boost}(\Delta\beta)\, A_{boost}(\beta)\, x = A_b(\Delta\beta)\, A_T^{-1}\, A_b(\beta+\delta\beta)\, x$$

$$= A_b(\Delta\beta)\, A_b(-\Delta\beta)\, R(-\Delta\Omega)\, A_b(\beta+\delta\beta)\, x$$

$$(52) \qquad x'' = R(-\Delta\Omega)\, \underbrace{A_{boost}(\beta+\delta\beta)}_{x''}\, x$$

14,

این بدین معنا است که x''' از دوران با $\Delta\Omega$ نسبت به x'' به دست می‌آید

حال با توجه به رابطه مهم

(53)
$$\left.\frac{dG}{dt}\right|_{non-rot} = \left.\frac{dG}{dt}\right|_{rest\ frame} + \vec{\omega}_T \times \vec{G}$$

می‌توانیم سرعت زاویه‌ای توماس را محاسبه کنیم

(54)
$$\omega_T = -\lim_{\delta t \to 0} \frac{\Delta\Omega}{\delta t} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\,\frac{\vec{a}\times\vec{v}}{c^2}$$

که $\vec{a}$ سرعت در دستگاه آزمایشگاه است. از طرف دیگر

(55)
$$\left.\frac{dG}{dt}\right|_{rest\ frame} = \gamma^{-1}\left.\frac{dG}{d\tau}\right|_{rest-frame}$$

حرکت تقدیمی توماس کاملا از سینماتیک است. درصورتی که شتاب مولفه‌ای در راستای عمود بر $\vec{v}$ داشته باشد. این حرکت تقدیمی انجام می‌دهد.

برای الکترون در اتم $e\vec{E} = -\frac{\vec{r}}{r}\frac{dV}{dr}$ می‌توانیم شتاب را محاسبه کنیم

(56)
$$\omega_T \simeq -\frac{1}{2c^2}\,\frac{\vec{r}\times\vec{v}}{mr}\,\frac{dV}{dr} = -\frac{1}{2m^2c^2}\,\vec{L}\,\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}$$

تبدیل

$$\frac{\gamma^2}{1+\gamma} \simeq \frac{1}{2} \qquad v \ll c$$

15

حال با توجه به انرژی اندرکنش اسپین - (میدان، اندازه حرکت زاویه‌ای) داریم

$$U' = -\frac{ge}{2mc}\,\vec{S}\cdot\vec{B} + \frac{g}{2m^2c^2}\,(\vec{S}\cdot\vec{L})\,\frac{1}{r}\,\frac{dV}{dr} \tag{57}$$

$$\begin{cases} U = U' + S\cdot\omega_T \\ \omega_T = -\dfrac{1}{2m^2c^2}\,\vec{L}\,\dfrac{1}{r}\,\dfrac{dV}{dr} \end{cases} \tag{58}$$

(59)

در نتیجه

$$U = -\frac{ge}{2mc}\,\vec{S}\cdot\vec{B} + \frac{(g-1)}{2m^2c^2}\,\vec{S}\cdot\vec{L}\,\frac{1}{r}\,\frac{dV}{dr}$$

* for $g=2$, spin-orbit interaction is reduced by $\frac{1}{2}$! (Thomas factor)

این همان مقدار صحیحی است که در آزمایشگاه مشاهده می‌کنیم.

بررسی روابط لورنتز ناوردا: V. Bargmann, L. Michel and V.L. Telegdi (BMT), Phys. Rev. Lett. 2, 435 (1959) بسیار جالب خواهد بود.

«پایان درس‌نامه»