■ نظریه میدان کلاسیک نسبیتی

میدان مفهومی است که به هر نقطه از فضا (فضا-زمان) کمیتی را نسبت می‌دهد. این کمیت‌ها می‌توانند اسکالر، برداری و یا تانسوری باشند. به طور مثال دما در هر نقطه از یک اتاق میدان اسکالر است. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به عنوان میدان برداری و ترکیب فضا-زمان به عنوان میدان تانسوری هستند.

- میدان‌ها دارای بی‌نهایت درجه آزادی هستند. درحالی که ذرات (مجموع ذرات) در مکانیک کلاسیک دارای تعداد مشخص مختصه تعمیم‌یافته هستند $q_a(t)$: طوری که میدان $\phi_a(t,\vec{x})$ که $\vec{x}$ نقش label را ایفا می‌کند.

■ لاگرانژی میدان

در مورد میدان‌ها نیز لاگرانژی تابعی از خود میدان ϕ_a، مشتقات آن است $\partial_\mu \phi_a$ که به صورت زیر نوشته می‌شود.

(1) $$L(t) = \int d^3x \, \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$$

که $\mathcal{L}$ را چگالی لاگرانژی Lagrangian density می‌گویند.

توجه داشته باشید که $\partial_\mu \phi_a$ می‌تواند مشتق زمانی $\mu=0$، مشتق مکانی $\mu=i=1,2,3$ را همراه داشته باشد و میدان را نیز تابع $\phi = \phi(x^\mu)$ می‌دانیم

$x^\mu = (t, x, y, z)$ $\quad$ $\mu=0$ زمان $\quad$ $\mu=1,2,3$ (x,y,z)

2/

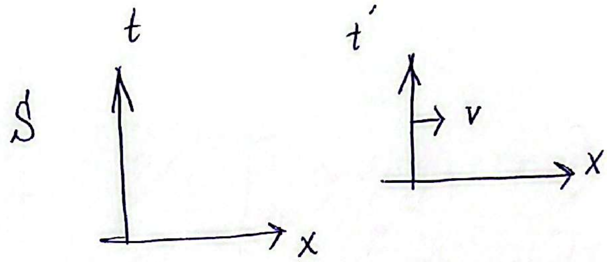
برای بازه زمانی $t \in [t_1, t_2]$ کنش به صورت زیر است.

$$(2) \qquad S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \, \mathcal{L} = \int d^4x \, \mathcal{L}$$

در مکانیک کلاسیک، لاگرانژی فقط تابعی از q_a و $\dot{q}_a$ است. تا معادلات تابع درجه ۲ باشند، مشتقات بالاتر ظاهر نمی‌شوند. از طرف دیگر به خاطر "Lorentz invariance"، لاگرانژی تابعی از $\nabla\phi_a$ نیز هست که مشتقات بالاتر نیز در آن ظاهر نمی‌شود.

تمرین: با تعریف (تبدیلات لورنتس) نشان دهید که معادله موج ناوردا است!

$$(3) \qquad \text{تبدیل لورنتس} \quad \begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}$$



$$(4) \qquad \partial/\partial t = \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$= -\gamma v \, \partial/\partial x' + \gamma \, \partial/\partial t'$$

$$\partial^2/\partial t^2 = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\gamma v \, \partial/\partial x' + \gamma \frac{\partial}{\partial t'}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(-\gamma v \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\left(-\gamma v \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t'}\right)\frac{\partial t'}{\partial t}$$

3,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(-\gamma v \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t'}\right)(-\gamma v)$$

$$+ \left(-\gamma v \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)(\gamma)$$

$$= + \gamma^2 v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2 v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[-\gamma \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial}{\partial x'}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t'}\left[-\gamma \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial}{\partial x'}\right]\frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x'}\left[-\gamma \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial}{\partial x'}\right]\frac{\partial x'}{\partial x}$$

$$= \left[-\gamma \frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'}\right]\left(-\gamma \frac{v}{c^2}\right)$$

$$+ \left(-\gamma \frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right]\gamma$$

$$= + \gamma^2 \frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\gamma^2 \frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

در نتیجه معادله موج $\Box\Phi = 0$ به صورت زیر خواهد بود.

(5)
$$\Box\Phi(t,x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi(t,x)$$

$$= \Big[\gamma^2 v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\gamma^2 v \frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 2\gamma^2 \frac{v}{\cancel{c^2}}\cancel{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} - \gamma^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\Big]\Phi$$

$$= \Big[\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\underbrace{(\gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2)}_{-\gamma^2 c^2(1 - v^2/c^2)} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2}\underbrace{\left(\gamma^2 - \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right)}_{1}\Big]\Phi$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)\Phi$$

ضرب و تقسیم فوق نشان داده چگونه معادله موج تحت تبدیلات لورنتس ناوردا می ماند. سرعت انتشار موج نیز در دو دستگاه یکسان است. نکته مهم دیگر در مورد ۴ بردار مکان زمان، همگر مشتق گرا هستند.

(6) $$x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3)$$

(7) $$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (-ct, x^1, x^2, x^3)$$

(8) $$x^\mu x_\mu = -c^2t^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

و به همین ترتیب عملگر مشتق

(9) $$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(10) $$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu = \left(-\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

درنتیجه (11) $$\partial_\mu \partial^\mu = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

این بحث که از آن جا مهم بوده که در بحث نظریه میدان کلاسیک و نوشتن لاگرانژی، معادلات اویلر-لاگرانژ و باید توجه داشته باشیم که ما معتقد به احترام گذاشتن به تبدیلات لورنتس (نسبیت خاص) هستیم. از این رو

"We should look at space & time on the same footing"

باید فضا-زمان را بصورت یکسان ببینیم.

در مورد کنش

(12) $$[S] = [\text{Energy} \times \text{time}] = ML^2T^{-2} \times T = ML^2T^{-1}$$

در واحدهای طبیعی $c = \hbar = 1$، $[M] = [L]^{-1} = [T]^{-1}$، کنش بدون بعد است

(13) $$[S] = \text{No. Dim} \rightarrow [\mathcal{L}] \equiv L^4$$

درنتیجه با توجه به این که $[\partial_\mu] = L^{-1}$ است می‌توان بعد میدان را در فرمول‌ها را مشخص کرد.

۵) اصل کمترین کنش

طبق این اصل، ادعا می‌شود که یک سیستم در تحول خود از زمان t_1 تا t_2 در فضای پیکربندی configuration مسیری را دنبال می‌کند که $\delta S = 0$ اکسترمم است. این بدین معنا است.

$$(14) \quad \delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta(\partial_\mu \phi_a) \right\}$$

جابجایی δ و مشتق

$$= \int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) \right] + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right) \right\} = 0$$

جزء به جزء

ترم آخر مشتق کامل است که در بی‌نهایت فضایی در شرط زیر صدق کند، ترم آخر لاگرانژی قابل صرف‌نظر است

$$(15) \quad \delta \phi_a(t_1, \vec{x}) = \delta \phi_a(t_2, x) = 0$$

در نتیجه معادله اویلر-لاگرانژ (معادله حرکت) را برای ϕ_a به دست می‌آوریم

$$(16) \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0$$

این معادله اویلر-لاگرانژ معادل ذره‌ای فرمالیسم کلاسیک برای میدان کلاسیک است.

در ادامه به بررسی فرمالیسم همیلتونی خواهیم پرداخت.

□ فرمالیسم همیلتونی

در مکانیک کلاسیک همیلتونی یک ذره را به صورت زیر می‌نویسیم

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i (q_i, p_i, t) - L \tag{17}$$

که تکانه تعمیم Conjugate momentum به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{18}$$

از آنجایی که در نظریه میدان تعداد درجات آزادی $N \to \infty$ است تکانه تعمیم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\pi^a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} \tag{19}$$

از این رو چگالی همیلتونی Hamiltonian density به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{H} = \pi^a \dot{\phi}_a - \mathcal{L} \tag{20}$$

همانند مکانیک کلاسیک $\dot{\phi}_a$ را باید با π^a جایگزین کرد. در نتیجه همیلتونی به صورت زیر خواهد بود

$$H = \int d^3x \, \mathcal{H} \tag{21}$$

□ نظریه میدان اسکالر Scalar field Theory

به عنوان ساده‌ترین مثال به بررسی میدان اسکالر می‌پردازیم. نظریه‌ای که به تبدیل لورنتس احترام می‌گذارد و به صورت میدان می‌توان آن را نوشت.

لاگرانژی میدان اسکالر به صورت زیر است .

(22) $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi)$$

انرژی پتانسیل

انرژی جنبشی (مشتق فضا / زمان)

توجه داشته باشید که لاگرانژی را اگر باز کنیم

$$\mathcal{L} = \dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - V(\phi)$$

$\nabla\phi$ را که بستگی به تغییرات مکانی میدان دارد را نیز می‌توانیم بخشی از انرژی پتانسیل در نظر بگیریم .

(23) $$S = \int \underbrace{d^4x}_{L^4} \left(\frac{1}{2} (\underbrace{\partial_\mu}_{L^{-1}} \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) \right)$$

در نتیجه $[\phi] = L^{-1}$ ، پتانسیل میدان اسکالر را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم .

(24) $$V = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \phi^n$$

$[m] = L^{-1}$ $\quad [\phi] = L^{-1}$ $\quad [\lambda_n] = L^{-4+n}$

که m جرم میدان ϕ است . λ_n را ضریب کوپلینگ می‌گویند . Coupling constant

به طور مثال ترم $n=3$ را بررسی کنیم .

(25) $$\left.\begin{cases} \mathcal{L}_3 = \frac{1}{3!} \lambda_3 \phi^3 \\ [\phi] = L^{-1} = M \end{cases}\right\} \rightarrow \text{در نتیجه} \quad [\lambda_3] = M$$

برای ضریب کوپلینگ می‌توانیم دسته بدون بعد λ_3 / E تعریف کنیم که E ، انرژی فرایند تحت مطالعه است . این بدین معنا است که

$\Delta\mathcal{L}_3 = \lambda_3 \phi^3/3!$ برای انرژی‌های بالا یک اختلال است. و در انرژی‌های $E \ll \lambda_3$ نمی‌توان از این ترم لاگرانژی صرف نظر کرد یا بحث اختلالی انجام داد.

به این ترم‌ها جمله‌های مربوط relevant می‌گویند، زیرا در حد انرژی‌های پایین $E < \lambda_3$ که فیزیک مشخص را بررسی می‌کنیم این ترم‌ها مهم می‌شوند.

البته در نظریه میدان نسبیتی $E > m$ در نتیجه در سلسله مراتب $\lambda_3 < m < E$ می‌توان از $\mathcal{L}_3$ صرف نظر کرد.

در حالت

$$\Delta\mathcal{L}_4 = \frac{1}{4!}\lambda_4 \phi^4 \tag{26}$$

$[\lambda_4] =$ بدون بعد called marginal parameter.

برای $n \geq 5$ ترم‌های $\Delta\mathcal{L}_n = \lambda_n \phi^n/n!$ در انرژی‌های پایین، کوچک خواهند بود و از این رو به آن‌ها جملات irrelevant می‌گویند. زیرا در انرژی‌های پایین که فیزیک را بررسی می‌کنیم، مهم نیستند. البته این ترم‌ها می‌توانند در انرژی‌های بالا مشکل‌ساز شوند. در نظریه میدان‌های کوانتومی QFT گریزی از فرایندهای انرژی بالا نیست. این ترم‌ها باعث ایجاد مفهوم non-renormalizable QFT می‌شوند.

□ معادله کلاین-گوردن

حال معادله اویلر-لاگرانژ را برای لاگرانژی $\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - V(\phi)$ به کار خواهیم برد.

$$(27)\qquad \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0$$

$$\Rightarrow\quad \partial_\mu\left(\frac{\partial\left((\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)\right)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)-\frac{\partial V}{\partial\phi}=\partial_\mu\partial^\mu\phi-\frac{\partial V}{\partial\phi}=0$$

فرض می‌کنیم $\Box=\partial_\mu\partial^\mu$ ، $\frac{\partial V}{\partial\phi}\equiv V'$ در نتیجه معادله حرکت برابر خواهد بود با

$$(28)\qquad \Box\phi+V'=0$$

dynamical evolution of scalar field.

در صورتی که لاگرانژی را به صورت زیر تعریف کنیم که به آن لاگرانژی میدان اسکالر جرم‌دار فرانشی می‌گویند.

$$(29)\qquad \mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2$$

که معادله میدان تبدیل می‌شود به

$$(30)\qquad (\Box+m^2)\phi=0 \qquad \text{Klein-Gordon Equation}$$

برای حل معادله کلاین-گوردن کلاسیک از تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم

$$(31)\qquad \phi(t,\vec{x})=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\,\phi(t,p)$$

که در فضای تکانه معادله کلاین گوردن به سادگی تبدیل می‌شود به

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (p^2 + m^2)\right]\phi(t,\vec{p}) = 0 \qquad (32)$$

این بدان معناست که برای هر مُد $\phi(t,\vec{p})$ با معادله هارمونیک ساده با فرکانس ω_p می‌رسیم

$$\omega_p = \sqrt{|p|^2 + m^2} \qquad (33)$$

درجواب کلی معادله کلاین - گوردن هستیم، برهم‌نهی خطی تمام جواب معادله هارمونیک ساده است.

$$\underbrace{\phi(x)}_{\text{میدان اسکالر حقیقی}} = \int \underbrace{\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_p}}_{\text{lorentz-invariant measure!}} \left(a(p)e^{-ipx} + a^*(p)e^{ipx}\right) \qquad (34)$$

ضرایب فوریه $a(p)$, $a^*(p)$

در نتیجه کوانتومی کردن میدان کلاسیک کلاین گوردن معادل کوانتومی کردن بی‌نهایت نوسانگر ساده است.

"The career of a young theoretical physicist consist of treating the harmonic oscillator in ever-increasing level of abstraction"

Sidney Coleman