نسبیت خاص

کنش الکترومغناطیس : الکترومغناطیس نظریه تانسوری مرتبه یک A^{μ} است. به بیان دیگر میدان های ما ۴-بردار نسبیتی پتانسیل هستند. از این رو انتظار داریم که کنش الکترومغناطیس به صورت زیر باشد

$$S = S\left[A_{\mu}(\vec{x},t) \,;\, \partial_{\nu} A_{\mu}(\vec{x},t)\right]$$

همانگونه که ملاحظه می کنید میدان و تمام مشتق های (زمانی، مکانی) آن در کنش وجود دارند.

از آن جایی که معادلات ماکسول را از پیش به دست آورده ایم. پیدا کردن کنش هدفی جز ارائه یک کمیت ناوردای لورنتسی نیست که وردش آن معادلات ماکسول را به دست دهد.

معادلات ماکسول

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

به زبان نسبیتی

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = J^{\nu}$$

- پیشنهاد کنش زیر است

$$S\left[A_{\mu}(\vec{x},t) ; \partial_{\nu} A_{\mu}(\vec{x},t)\right] = -\frac{1}{4}\int d^4x \left[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 4j^{\mu}A_{\mu}\right]$$

ناوردای حجم فضا-زمان

سهم میدان

سهم اندرکنش

2

حال به معادله اویلر - لاگرانژ میدان اسکالر توجه می‌کنیم و آن را برای چاربردار A_μ تعمیم می‌دهیم.

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \;\; \longrightarrow$$ جایگذاری ϕ با A_ν

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0$$ Euler-Lagrange Eq.

حال از ترم $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ مشتق می‌گیریم.

ترم ۱:

$$\frac{\partial(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial\left((\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)F^{\alpha\beta}\right)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}$$

$$+ F_{\alpha\beta}\frac{\partial(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}$$

در مورد ترم $\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}$ آسان است؛ در صورتی که اندیس‌های مشتق و چاربردار تک‌به‌تک یکی باشند نتیجه یک و در غیر این صورت صفر است. باید دقت کرد که هر دو اندیس‌ها پایین هستند.

این بدین معنا است که برای محاسبه ترم $\frac{\partial(\partial^\alpha A^\beta)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}$ ابتدا باید با تکنیک اندیس‌ها را پایین آورد و سپس مشتق گرفت از این رو:

$$\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} = \delta^\mu_\alpha\,\delta^\nu_\beta\,F^{\alpha\beta} - \delta^\mu_\beta\,\delta^\nu_\alpha\,F^{\alpha\beta}$$

$$+\,F_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\left(\eta^{\sigma\alpha}\partial_\sigma A_\rho\,\eta^{\rho\beta} - \eta^{\sigma\beta}\partial_\sigma A_\rho\,\eta^{\rho\alpha}\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}$$

$$= F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F_{\alpha\beta}\,\eta^{\sigma\alpha}\eta^{\rho\beta}\,\delta^\mu_\sigma\,\delta^\nu_\rho - F_{\alpha\beta}\,\eta^{\sigma\beta}\eta^{\rho\alpha}\,\delta^\mu_\sigma\,\delta^\nu_\rho$$

$$= 2F^{\mu\nu} + F_{\alpha\beta}\,\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - F_{\alpha\beta}\,\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}$$

$$= 2F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} = 4F^{\mu\nu}$$

توجه داشته باشید که در محاسبه بالا متریک مینکوفسکی $\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ ثابت است و مشتق آن صفر.
هم چنین از پادمتقارن بودن تانسور $F^{\mu\nu}$ در محاسبه فوق استفاده کردیم. هم اکنون دلیل وجود ضریب $\frac{1}{4}$ در لاگرانژی مشهود است. در ادامه

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} = \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

که سمت راست معادله ماکسول است.

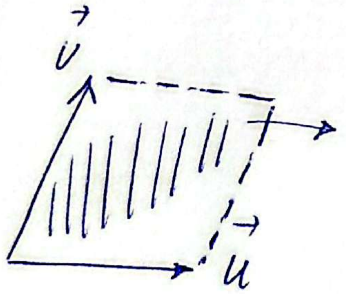
با توجه به جمله اندرکنشی در لاگرانژی $j^\mu A_\mu$ و همچنین جمله $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}$ در معادله اویلر - لاگرانژ ورزش کنش معادله ماکسول را به دست می دهد.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = A^\nu$$

این بدین معنا است که انتخاب $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ برای کنش الکترومغناطیس صحیح بوده است.

در کنش بسیاری سوالی که می توان پرسید در مورد جمله d^4x است. آیا این جمله ناوردای لورنتسی است؟ برای پاسخ به این پرسش باید ضرب خارجی (exterior derivative) یا در معنا دقیق تر ضرب وج wedge product را تعریف کرد.

برای شرح مطلب فرض کنید دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مفروض باشند. سوال این است که چه کمیتی بر روی این دو بردار سطح به دست آمده از آن ها را به دست می دهد.



$$f(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Area}(u, v) = u \wedge v$$

تعریف ضرب وج

در مختصات دکارتی می دانیم که ضرب خارجی این کار را انجام می دهد و به معنا در مثال این ضرب سطح A را مشخص می کند یعنی

$$\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$$
$$\vec{v} = c\hat{i} + d\hat{j}$$

$$|\text{area}| \equiv |ad - bc|$$

$$u \wedge v = (a\hat{i} + b\hat{j}) \wedge (c\hat{i} + d\hat{j})$$

$$= \underbrace{ac\, \hat{i} \wedge \hat{i}}_{0} + ad\, \hat{i} \wedge \hat{j} + bc\, \hat{j} \wedge \hat{i} + \underbrace{bd\, \hat{j} \wedge \hat{j}}_{0}$$

ترم اول و چهارم صفر است چون مساحتی که یک بردار با خودش درست می‌کند صفر است

$$u \wedge v = ad\, \hat{i} \wedge \hat{j} + bc\, \hat{j} \wedge \hat{i}$$

از سوی دیگر $\hat{i} \wedge \hat{j} = -\hat{j} \wedge \hat{i}$ برای اثبات این رابطه نیز ضرب وج بردار $\hat{i} + \hat{j}$ با خودش را که صفر است محاسبه می‌کنیم.

$$0 = (\hat{i} + \hat{j}) \wedge (\hat{i} + \hat{j}) = \underbrace{\hat{i} \wedge \hat{i}}_{0} + \hat{i} \wedge \hat{j} + \hat{j} \wedge \hat{i} + \underbrace{\hat{j} \wedge \hat{j}}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{i} \wedge \hat{j} = -\hat{j} \wedge \hat{i}$$

در نتیجه برای ضرب وج $\vec{u}, \vec{v}$ خواهیم داشت

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = ad\, \hat{i} \wedge \hat{j} - bc\, \hat{i} \wedge \hat{j} = (ad - bc)\, \hat{i} \wedge \hat{j}$$

که همان نتیجه مورد انتظار است.

حال ضرب وج دیفرانسیل‌های $d\vec{x}$ را در دو دستگاه S و S' با پیکربندی استاندارد محاسبه می‌کنیم

تبدیلات زیر را در نظر بگیرید

$$c\,dt' = \gamma \left(c\,dt - \frac{v}{c}\, dx\right) \qquad dy' = dy$$

$$dx' = \gamma \left(dx - \frac{v}{c}\, c\,dt\right) \qquad dz' = dz$$

$$d^4x' = dct' \wedge dx' \wedge dy' \wedge dz'$$

$$= \gamma\left(cdt - \frac{v}{c}dx\right) \wedge \gamma\left(dx - \frac{v}{c}cdt\right) \wedge dy \wedge dz$$

$$= \gamma^2\Big(cdt \wedge dx - \frac{v}{c}\underbrace{cdt \wedge cdt}_{=0} - \frac{v}{c}\underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{v}{c}\right)^2 dx \wedge cdt}_{\text{پادتقارن}}\Big)$$

$$\wedge\, dy \wedge dz$$

$$= \gamma^2\left(cdt \wedge dx - \left(\frac{v}{c}\right)^2 (cdt) \wedge dx\right) \wedge dy \wedge dz$$

$$= \gamma^2\Big((cdt \wedge dx)\underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{\gamma^{-2}}\Big) \wedge dy \wedge dz$$

$$= cdt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \equiv d^4x$$

اثبات بالا نشان می‌دهد که حجم فضا-زمان نیز ناوردای لورنتسی است. از این رو کنش زیر، کنش مناسب الکترودینامیک است.

$$S\left[A_\mu(\vec{x},t),\, \partial_\nu A_\mu(\vec{x},t)\right] = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu\right]$$

کنش میدان به صورت زیر نوشته می‌شود.

کنش میدان

$$S = \int dt\, d^3x \Big(\underbrace{\frac{\epsilon_0}{2}E^2}_{\text{شبیه جمله جنبشی}} - \underbrace{\frac{1}{2\mu_0}B^2}_{\text{شبیه جمله پتانسیل}}\Big)$$