Special Relativity

نسبیت خاص

Fall 2025

درسنامه شماره ۱۷

برای تکمیل فرآیند نوشتن الکترودینامیک به زبان هم‌وردا (زبان تنسوری)، باید معادلات ماکسول را تبدیل شکل پیدا کنیم و همچنین نیروی لورنتس را هم‌وردا بنویسیم.

معادلات ناهمگن ماکسول به شکل زیر است.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \qquad (17\text{-}1)$$

این معادلات را به زبان تانسور شدت میدان field-strength tensor، چاربردار جریان J^α به صورت زیر است

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta \qquad (17\text{-}2)$$

و معادلات همگن

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

بر اساس تانسور شدت میدان دوگان dual field-strength tensor

$$\partial_\alpha \, {}^{*}F^{\alpha\beta} = 0 \qquad (17\text{-}3)$$

نیروی لورنتس وارد بر ذره‌ای با بار q برابر است با

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad (17\text{-}4)$$

$\vec{p}$ قسمت فضایی چاربردار انرژی-تکانه است.

$$p^\alpha = (p^0, \vec{p}) = m\,(u^0, \vec{u}) \qquad (17-5)$$

که $p^0 \equiv E/c$ ، U^α چاربردار سرعت است.

$$U^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\alpha}{dt} = \gamma (c, \vec{v}) = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \qquad (17-6)$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad (17-7)$$

اگر $c=1$ در نحوه‌ی نوشتاری الکترودینامیک : $\dfrac{d\vec{p}}{d\tau} = q\,(u^0 \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ * (17-8)

که $\vec{u} = \gamma \vec{v}$ $\qquad u^0 = \gamma c \underset{c=1}{=} \gamma$ (17-9)

سمت چپ رابطه فوق، سمت فضایی یک چاربردار است. با توجه به بحث چاربردار نیرو در درس نامه شماره‌ی ۱۵. قابل حدس است که قسمت زمانی آن، آهنگ تغییر انرژی ذره است.

$$\frac{dp^0}{d\tau} = q\, \vec{u} \cdot \vec{E} \quad ** \qquad (17-10)$$

حال نشان می‌دهیم که سمت راست معادله‌ی * و ** یک چاربردار را تشکیل می‌دهند. این مهم با تعریف تانسور شدت امکان‌پذیر است.

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = m \frac{du^\alpha}{d\tau} = q F^{\alpha\beta} u_\beta \qquad (17-11)$$

$$\alpha = 0 \qquad \frac{dp^0}{d\tau} = q\, F^{0\beta} u_\beta = q \underset{\overset{\parallel}{0}}{F^{00}} u_0 + q\, F^{0i} u_i$$

$$= q\,(-E_i)(-u)_i = q\, \vec{E} \cdot \vec{u} \qquad (17\text{-}12)$$

$$\alpha = j \qquad \frac{dp^j}{d\tau} = q\, F^{j\beta} u_\beta = q\, F^{j0} u_0 + q\, F^{ji} u_i$$

$$= q\, E_j\, u^0 + q\, \underbrace{\epsilon^{kji} B_k u_i}_{\epsilon^{jik} u_i B_k} = q\,(u^0 \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \qquad (17\text{-}13)$$

برای تفکیک مفهوم معادلات ماکسول ماکروسکوپیک (یا معادلات میدان در ماده)، باید دو نوع تانسور شدت میدان را تفکیک کنیم که $G^{\alpha\beta} = (\vec{D}, \vec{H})$, $F^{\alpha\beta} = (\vec{E}, \vec{B})$

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (17\text{-}14)$$

و $G^{\alpha\beta}$ با جابجایی $E \to D$، $B \to H$ به دست می‌آید.

شکل هم‌وردا معادلات ماکسول با حالت تانسوری به شکل زیر است.

$$\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = J^\beta \quad , \quad \partial_\alpha \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta} = 0 \qquad (17-15)$$

○ تبدیل تانسور شدت میدان در دستگاه‌های لخت

از آن جایی که تانسورهای $F_{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}$ از بردارهای لورنتس هم‌وردای ∂_μ , A_μ به دست آمده‌اند، خود لورنتس هم‌وردا هستند و تحت تبدیلات لورنتس به شکل زیر تبدیل می‌شوند.

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma} \qquad (17-16)$$

که اگر بخواهیم آن را به صورت ماتریسی بنویسیم $F' = \Lambda F \Lambda^T$ را خواهیم داشت. این بدان معنی است که ناظر S اگر میدان الکتریکی و مغناطیسی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را در نظر داشته باشد، در دستگاه S' این میدان‌ها متفاوت و از رابطه (17-16) به دست می‌آید.

حال به یاد آوری، اگر ماتریس دوران 3×3، R که $R^T R = 1$ می‌توان ماتریس تبدیل لورنتس را به صورت زیر ساخت

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad (17-17)$$

برای خیز در پیکربندی استاندارد نیز تبدیل را داریم.

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (17-18)$$

اگر از تبدیلات لورنتس فقط دوران را درنظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\vec{E}' = R\vec{E} \quad , \quad \vec{B}' = R\vec{B} \qquad (17-19)$$

برای تمرین رابطه (17-19) را نشان خواهیم داد.

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\,\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\,F^{\rho\sigma} \xrightarrow{\text{بشکل ماتریسی}} F' = \Lambda F \Lambda^{T}$$

$$\Lambda F \Lambda^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

دوران حول محور z با زاویه θ — نمایش تانسوری $F^{\mu\nu}$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (17-20)$$

ماتریس Λ^{T} دوران حول محور z با زاویه θ

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x\cos\theta + E_y\sin\theta & -E_x\sin\theta - E_y\cos\theta & -E_z \\ E_x & B_z\sin\theta & -B_z\cos\theta & B_y \\ E_y & B_z\cos\theta & B_z\sin\theta & -B_x \\ E_z & -B_y\cos\theta - B_x\sin\theta & -B_y\sin\theta + B_x\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

(17-21)

6

$$
= \begin{pmatrix}
0 & -E_x\cos\theta + E_y\sin\theta & -E_x\sin\theta - E_y\cos\theta & -E_z \\
\cos\theta E_x - \sin\theta E_y & \underbrace{B_z\sin\theta\cos\theta - B_z\cos\theta\sin\theta}_{=0} & \underbrace{-B_z\cos^2\theta - B_z\sin^2\theta}_{B_z} & \cos\theta B_y + \sin\theta B_x \\
\sin\theta E_x + E_y\cos\theta & \underbrace{B_z\sin^2\theta + B_z\cos^2\theta}_{B_z} & \underbrace{-B_z\cos\theta\sin\theta + B_z\sin\theta\cos\theta}_{=0} & \sin\theta B_y - B_x\cos\theta \\
E_z & -B_y\cos\theta - B_x\sin\theta & -B_y\sin\theta + B_x\cos\theta & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & -E_x' & -E_y' & -E_z' \\
E_x' & 0 & -B_z' & B_y \\
E_y' & B_z & 0 & -B_x \\
E_z' & -B_y & B_x & 0
\end{pmatrix}
$$

تانسور $F'^{\mu\nu}$ در دستگاه S'

θ دوران میدان الکتریکی حول محور z با زاویه

از برابری دو رابطه داریم:

$$
\begin{cases}
E_x' = E_x\cos\theta - E_y\sin\theta \\
E_y' = E_x\sin\theta + E_y\cos\theta \\
E_z' = E_z
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
B_x' = B_x\cos\theta - B_y\sin\theta \\
B_y' = B_x\sin\theta + B_y\cos\theta \\
B_z' = B_z
\end{cases}
\qquad (۱۷-۲۲)
$$

حال به بررسی اثر خیز (boost) در تبدیلات لورنتس می‌پردازیم. خیز را در راستای x در نظر می‌گیریم. دستگاه S' با سرعت v نسبت به S حرکت می‌کند.

به طور مثال:
$$F'^{01} = -E'_x = \Lambda^0{}_\rho \Lambda^1{}_\sigma F^{\rho\sigma} \qquad (17-23)$$

با توجه به
$$\Lambda^\mu{}_\nu = \left(\begin{array}{cc|cc} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
ترم‌های غیرصفر عبارت است

$$-E'_x = \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_1 F^{01} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_0 F^{10}$$
$$= \gamma^2(-E_x) + (-\gamma\beta)^2 E_x = -E_x \gamma^2(1-\beta^2) = -E_x$$
(17-24)

$$F'^{02} = -E'_y = \Lambda^0{}_\rho \Lambda^2{}_\sigma F^{\rho\sigma}$$
$$= \Lambda^0{}_0 \Lambda^2{}_2 F^{02} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^2{}_2 F^{12}$$
$$= \gamma(1)(-E_y) + (-\gamma\beta)(1)(-B_z)$$
$$-E'_y = -\gamma(E_y - \beta B_z) \qquad (17-25)$$

$$F'^{03} = -E'_z = \Lambda^0{}_\rho \Lambda^3{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0{}_0 \Lambda^3{}_3 F^{03} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^3{}_3 F^{13}$$
$$(17-26) \qquad = \gamma(1)(-E_z) + (-\gamma\beta)(1)(B_y) = -\gamma(E_z + \beta B_y)$$

حال برای میدان مغناطیسی محاسبه می‌کنیم.

$$F'^{12} = -B'_z = \Lambda^1{}_\rho \Lambda^2{}_\sigma F^{\rho\sigma}$$

$$= \Lambda^1{}_0 \Lambda^2{}_2 F^{02} + \Lambda^1{}_1 \Lambda^2{}_2 F^{12}$$

$$= (-\gamma\beta)(1)(-E_y) + \gamma(1)(-B_z) = -\gamma(B_z - \beta E_y)$$

$$B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \qquad (17\text{-}27)$$

البته باید دقت کرد که در واحد SI که بُعد میدان الکتریکی و مغناطیسی با یک سرعت به یکدیگر متصل است $[E] = [B] \times (\text{velocity})$ در یکابندی استاندارد، روابط تبدیل میدان به صورت زیر است.

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \end{cases} \qquad (17\text{-}28)$$

$$\begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z\right) \\ B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right) \end{cases} \qquad (17\text{-}29)$$

جالب است و باید توجه کرد که میدان الکتریکی و مغناطیسی در راستای سرعت $\vec{v}$ بدون تغییر ماند، و تغییرات مولفه‌های میدان در راستای عمود رخ می‌دهد. نکته جالب دیگر این است که میدان الکتریکی از دید یک ناظر از دید دیگری تبدیل به میدان مغناطیسی می‌شود و بالعکس.

نکته جالب دیگر آن است که در حد $v \ll c$ ، تبدیلات میدان ها برابر خواهد شد با

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad , \quad \vec{B}' = \vec{B} \tag{17-30}$$

که آن را به عنوان تبدیلات کلاسیک میدان ها می توان در نظر گرفت. و جالب تر آن که ترکیب $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ در نیروی لورنتس وارد شده است.

تبدیلات کلی نیز در راستای دلخواه $\vec{\beta}$ به شکل کلی زیر به دست می آید که اثبات آن تمرین جالبی است.

Classical Electrodynamics by John David Jackson
Third Edition - Wiley 1999. Eq 11.149

$$\vec{E}' = \gamma \left(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{E} \right) \tag{17-31}$$

$$\vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{B} \right) \tag{17-32}$$

مثال: به عنوان یک مثال فرض می کنیم توزیع بار خطی با چگالی η در راستای x قرار داشته باشد. میدان الکتریکی این توزیع بار در دستگاه آزمایشگاه S به صورت زیر است:

$$\vec{E} = \frac{\eta}{2\pi \epsilon_0 \left(y^2 + z^2 \right)} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{17-33}$$

میدان مغناطیسی نیز برای توزیع بار استاتیک صفر است
$\vec{B} = 0$.

حال فرض کنید ناظر S' که با سرعت v در راستای x، موازی با سیم حامل بار، حرکت کند، میدان الکتریکی و مغناطیسی در دستگاه پریم چگونه است.

$$B_x = B_y = B_z = 0 \qquad (17\text{-}34)$$

$$E_x = 0 \qquad E_y = \frac{\eta y}{2\pi\epsilon_0 (y^2+z^2)} \qquad E_z = \frac{\eta z}{2\pi\epsilon_0 (y^2+z^2)}$$

با تبدیلات لورنتسی را استخراج کرده ایم

$$\begin{cases} E'_x = E_x = 0 \\ E'_y = \gamma(E_y - v\underset{}{\overset{\overset{0}{\|}}{B_z}}) = \dfrac{\gamma\eta y}{2\pi\epsilon_0 (y^2+z^2)} \\ E'_z = \gamma(E_z + v\overset{\overset{0}{\|}}{B_y}) = \dfrac{\gamma\eta z}{2\pi\epsilon_0 (y^2+z^2)} \end{cases} \qquad (17\text{-}35)$$

$$(17\text{-}36)$$

$$\begin{cases} B'_x = B_x = 0 \\ B'_y = \gamma(\underset{\underset{0}{\|}}{B_y} + \dfrac{v}{c^2} E_z) = \dfrac{\gamma v \eta z}{c^2 2\pi\epsilon_0 (y^2+z^2)} \\ B'_z = \gamma(\underset{\underset{0}{\|}}{B_z} - \dfrac{v}{c^2} E_y) = \dfrac{-\gamma v \eta y}{c^2 2\pi\epsilon_0 (y^2+z^2)} \end{cases}$$

حال می توانیم مولفه‌های بدست آمده را به شکل برداری بنویسیم، از سوی دیگر مولفه‌های y و z را از
دستگاه S' منتقل کنیم. البته به خاطر آنکه حرکت در جهت x است، پس گشتارها $y=y'$ ، $z=z'$

$$\vec{E}' = \frac{\eta\gamma}{2\pi\epsilon_0 (y^2+z^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\eta\gamma}{2\pi\epsilon_0 (y'^2+z'^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad (17\text{-}37)$$

$$\vec{B}' = \frac{\eta\gamma v}{2\pi\epsilon_0 c^2 (y^2+z^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} = \frac{\eta\gamma v}{2\pi\epsilon_0 c^2 (y'^2+z'^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ z' \\ -y' \end{pmatrix} \qquad (17\text{-}38)$$

تساوی های دوم از اینکه $y = y'$ ، $z = z'$ استفاده شده است.

در مورد میدان الکتریکی، جواب به دست آمده شبیه آن است که بار (چگالی بار) تغییر کرده است $\eta' = \eta\gamma$

که این تغییر به دلیل انقباض لورنتسی است.

اما در مورد میدان مغناطیسی ناظر S' جریانی را به صورت $I' = -\gamma\eta v$ مشاهده می‌کند

و میدان مغناطیسی به صورت زیر نوشته می‌شود.

(17-39)

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi\sqrt{y'^2+z'^2}}\,\hat{\phi}'$$

که $\hat{\phi}'$ زاویه سمتی است که محور آن x' است.

این همان نتیجه ای است که شما از قانون آمپر $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$ انتظار دارید.

ولی این نتیجه را از قانون گاوس + تبدیل لورنتس به دست آوردید.

به بیان دیگر می‌توان میدان مغناطیسی را به عنوان اثر نسبیتی در نظر گرفت و الکترومغناطیس را اثر نسبیتی نامید.

مثال دوم: فرض کنید بار Q در دستگاه لخت S، ایستا است. میدان الکتریکی توسط رابطه زیر داده می‌شود.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\left[x^2+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (17\text{-}40)$$

$$\vec{B} = 0$$

حال فرض کنید به همین بار در دستگاه، که با سرعت $\vec{v} = (v,0,0)$ حرکت می‌کند، نگاه شود.

با توجه به تبدیلات لورنتس که برای میدان‌ها به دست آوردیم و صفر بودن میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\vec{E}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\left[x^2+y^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x \\ \gamma y \\ \gamma z \end{pmatrix} \qquad (17\text{-}41)$$

حال باید این میدان را در دستگاه مختصات S' با توجه به تبدیلات

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \qquad (17\text{-}42)$$

بازنویسی کنیم.

$$\vec{E}' = \frac{Q\gamma}{4\pi\epsilon_0\left[\gamma^2(x'+vt')^2+y'^2+z'^2\right]^{3/2}}\begin{pmatrix} x'+vt' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

در دستگاه S'، ذره در موقعیت $\vec{x}' = (-vt', 0, 0)$ قرار دارد.

حال در زمان $t'=0$ در دستگاه S' به بار نگاه کنیم. در این صورت میدان الکتریکی به صورت شعاعی به مبدأ نشر می‌شود. در جهت $\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

ولی در این حالت میدان الکتریکی همسانگرد نیست. این به این دلیل است که مخرج رابطه (17-42) همسانگرد نیست. به خاطر عامل γ^2 ضریب x'.

در زمان $t'=0$ مخرج کسر به صورت زیر ساده می‌شود

$$\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2 = \gamma^2 x'^2 + \underbrace{x'^2 + y'^2 + z'^2}_{r'^2} - x'^2$$

$$= (\gamma^2 - 1)x'^2 + r'^2 = \frac{v^2}{c^2}\gamma^2 x'^2 + r'^2 \qquad (17\text{-}43)$$

از آنجایی که $x' = r'\cos\theta$ (به تعریف زوایا توجه داشته باشید)

زاویه بین بردار r' و x'

$$= \left(\frac{v^2\gamma^2}{c^2}\cos^2\theta + 1\right) r'^2 \qquad (17\text{-}44)$$

$$= \left(\frac{v^2\gamma^2}{c^2} - \frac{v^2\gamma^2}{c^2}\sin^2\theta + 1\right) r'^2$$

$$= \gamma^2\left(\cancel{\frac{v^2}{c^2}} - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta + \underbrace{\left(1 - \cancel{\frac{v^2}{c^2}}\right)}_{\gamma^{-2}}\right) r'^2$$

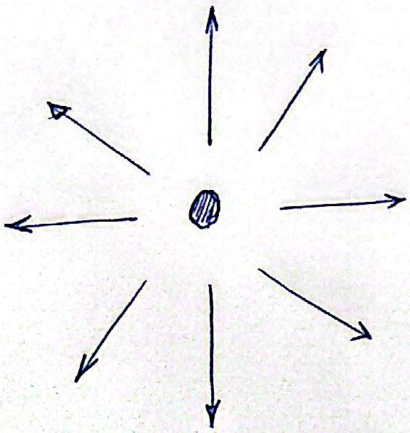
$$r^2 = \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2\theta\right) r'^2$$

این مدل مهم است که میدان الکتریکی را در دستگاه S' به صورت زیر بنویسیم

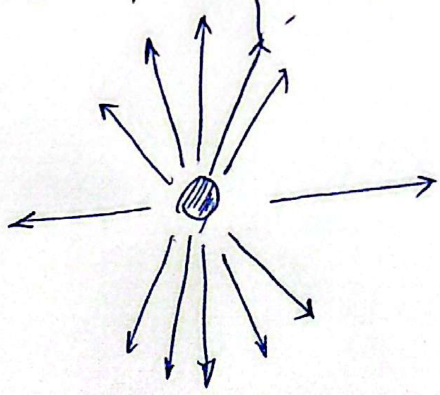
$$\vec{E}' = \frac{1}{\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2 \sin^2\theta}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{Q\,\hat{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \qquad (17-45)$$

فاکتوری که باعث می‌شود میدان الکتریکی همسانگرد نباشد.

به دلیل فاکتور $\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2 \sin^2\theta}{c^2}\right)^{3/2}}$، میدان الکتریکی در راستای x کاهش می‌یابد و در راستای y, z افزایش داریم $(\theta \to \frac{\pi}{2})$. مطابق شکل زیر



- میدان الکتریکی همسانگرد در دستگاه S.



- میدان الکتریکی در دستگاه S' افزایش شدید در راستای عمود

حال میدان مغناطیسی را به سادگی می‌توانیم محاسبه کنیم.

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left[x^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = 0 \qquad (17\text{-}46)$$

$$B'_x = B_x = 0 \qquad (17\text{-}47)$$

$$B'_y = \gamma\left(\underset{\overset{\|}{0}}{B_y} + \frac{v}{c^2} E_z\right) = \gamma \frac{v}{c^2} E_z$$

$$B'_z = \gamma\left(\underset{\overset{\|}{0}}{B_z} - \frac{v}{c^2} E_y\right) = -\gamma \frac{v}{c^2} E_y$$

در نتیجه

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 Q \gamma v}{4\pi \left[x^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} \qquad (17\text{-}48)$$

از رابطه $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ استفاده شده است. در قدم آخر مختصات را با تبدیل لورنتس جایگزین می‌کنیم

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 Q \gamma v}{4\pi \left[\gamma^2 (x'+vt')^2 + y'^2 + z'^2\right]^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ z' \\ -y' \end{pmatrix} \qquad (17\text{-}49)$$

پایان درس نه