Special Relativity

Fall 2020

Lecture Note 14

نسبیت خاص

پاییز ۱۳۹۹

درس نامه ۱۴

در درس نامه گذشته به بررسی چارچوب ها و تبدیلات پرداختیم. حال به بررسی دینامیک نسبیتی با این مفهوم، خواهیم پرداخت.

در مکانیک نیوتنی قانون دوم نیوتن $\vec{f} = m\vec{a}$ همه حل مسائل دینامیکی بود. زیرا هر دو مفهوم جرم و نیرو در دستگاه هایی که با تبدیلات گالیله به یکدیگر مربوط بودند، مفاهیم ناوردا بودند. از سوی دیگر مشاهدات و آزمایش ها حتی در مقیاس کوچک (مانند حضیض عطارد) تطابق بسیار خوبی با مکانیک نیوتنی داشت.

البته با پیدایش نسبیت خاص و تبدیلات لورنتس، دانستیم که $\vec{f}$ (نیرو) مفهوم مناسبی برای حل مسائل دینامیکی نیست.

پیشنهاد استفاده از چهارگانه‌ها، $P^\mu = m_0 U^\mu$ و قانون پایستگی ۴-تکانه است.

P^μ یک چهاربردار زمان گونه ای است که به سوی آینده توجه می شود.

m_0 جرم سکون و ذاتی ذره است، U^μ چهاربردار سرعت است.

$$P^\mu = m_0 \gamma (c, \vec{v}) \qquad (1)$$

2. حال فرض اساسی، Basic assumption، بنیان نسبیت آن است که

چهارتکانه ذرات پایسته‌اند در هر برخورد به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{N} p^{\mu}_{i\,(ini)} = \sum_{i=1}^{N} p^{\mu}_{i\,(fin)}$$

که (ini)، (fin) به ترتیب پیش و پس از برخورد است. i شماره‌ی ذرات از یک تا N

از نمادگذاری زیر برای پایستگی تکانه استفاده می‌کند Ryndler

$$(3)\qquad \sum_{i}^{*} p^{\mu}_{i} = 0$$

که $\sum^{*}$ به معنای جمع بردارهای چهارتکانه با علامت مثبت برای پیش از برخورد و منفی برای پس از برخورد است.

با توجه به تعاریف زیر که در درس نیز پیش‌تر آمده بود

$$(4)\qquad p^{\mu} = \left(\gamma_{(v)} m_0 c,\ \gamma_{(v)} m_0 \vec{v}\right) \rightarrow \begin{cases} m = \gamma_{(v)} m_0 & \text{جرم نسبیتی} \\ \vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v} & \text{سه تکانه (تکانه)} \end{cases}$$

رابطه پایستگی (3) به صورت زیر نیز نوشته می‌شود.

$$(5)\qquad \sum^{*} p^{\mu} = 0 \rightarrow \begin{cases} \sum^{*} m = 0 & \text{پایستگی جرم نسبیتی} \\ \text{Conservation of Relativistic mass} \\ \sum^{*} \vec{p} = 0 & \text{پایستگی سه تکانه نسبیتی} \\ \text{Conservation of Relativistic 3D momentum} \end{cases}$$

3.

پایستگی ۴ کمیت $\vec{P}$ و E ویژگی اصلی دارد.

الف) ناوردایی لورنتس ب) سادگی: ج) سازگاری با کمیت نیوتنی در حد سرعت پایین

Newtonian Conformity

پایستگی ۴ کمیت فوق بسیار بنیادی است که در شبیه‌سازی ذرات به عنوان روش محاسبه جرم ذرات جدید در آشکارسازها استفاده می‌شود.

توجه داشته باشید که مفهوم جرم نسبتی و پایستگی آن $\sum^{*} m = 0$ معادل مفهوم هم ارزی جرم و انرژی است. زیرا γm_0 معیاری از انرژی کل سیستم است و پیوسته است.

$$(6)\quad m = \gamma m_0 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} m_0 = m_0 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} m_0 v^2\right) + \cdots$$

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \text{Relativistic Correction of Kinetic Energy}$$

نکته حائز توجه، این که در برخوردها الاستیک $\sum^{*} m_0 = 0$، نتیجه می‌گیریم که انرژی جنبشی پایسته است.

$$(7)\quad \sum^{*} m_0 = 0 \rightarrow \sum^{*} T = 0$$

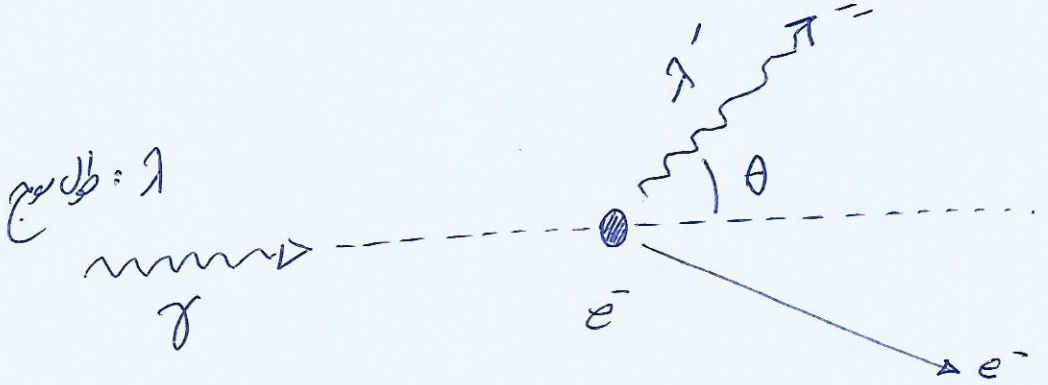
نکته بسیار مفید از حل مسائل درباره فوتون است که

$$(8)\quad \begin{array}{lll} m_0 = 0 & \gamma m_0 = m = E/c \\ v = c & \downarrow \quad \downarrow & \downarrow \\ & \text{صفر} \times \infty & \text{غیر صفر و مقدار} \end{array}$$

برای درک آن چه قانون پایستگی می‌تواند به ما یاری دهد مثال معروف اثر کامپتون

□ Compton Effect را بررسی می‌کنیم. این آزمایش که در سال 1922 توسط کامپتون با تابانیدن پرتو اکس با انرژی به الکترون‌ها تقریباً ساکن در گرافیت انجام شد.

در نتیجه اندرکنش فوتون با الکترون، فوتون با طول موج بلندتر منحرف می‌شود و به تبع آن الکترون نیز شکل زیر را مشاهده نمایید.



هدف پیدا کردن طول موج فوتون پس از برخورد است. اگر فرضیه‌ای از برخورد دو جسم 1 و 2 یکی در سکون و دیگری با سرعت نسبی V_{12} به سمت یکدیگر حرکت کنند می‌توان کمیت تازه‌ای را ساخت

$$P^{\mu} = m_0 u^{\mu} = \gamma m_0 (c, \vec{v}) \quad (9)$$

$$P_1^{\mu} = \gamma(v=0)\left(c, \vec{v}=0\right) = m_{01}(c, \vec{0})$$

ذره 1 - سکون

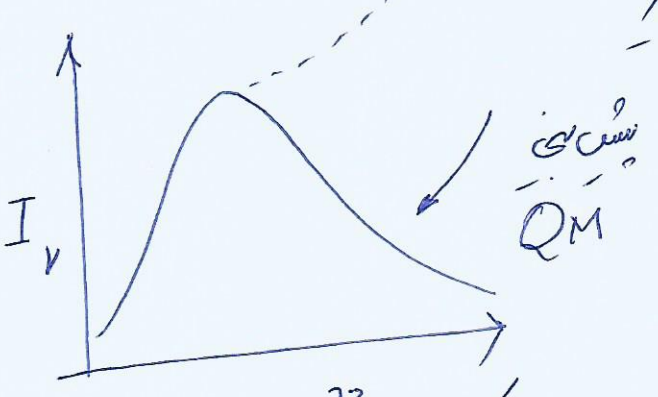
$$P_2^{\mu} = \gamma(V_{12})\, m_{02}\,(c, \vec{V}_{12})$$

ذره 2 - سرعت نسبی V_{12}

حال کمیت بدون تغیر (ناوردا) عبارت است از

$$(10) \qquad p^{\mu}_{1} \cdot p_{\mu_2} = \gamma(v_{12})\, m_{01} m_{02} c^2$$

به این کمیت برای برخورد فوتون - الکترون خواهیم پرداخت. در هر حال برای حل این مسئله باید بیشتر درباره فوتون بدانیم. کوانتای نور، طول موج دوبروی پس اصل مکمل ذره-موج بنیادهای نظریه کوانتومی هستند. این بنیان ها به طرز اعجاب انگیزی سازگار با نظریه نسبیت خاص هستند. فهم این که فوتون انرژی بسته دارد از داستان تابش جسم سیاه، ultraviolate catastrophe شروع شد. پلانک نشان داد که تابع توزیع تابش جسم سیاه در حسب فرکانس مانند شکل زیر

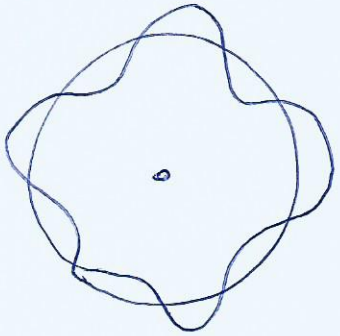


با رابطه $E = h\nu$ ، داده می شود که h ثابت پلانک است. پس با کشف اثر فوتوالکتریک توسط Leonard (1902) و توضیح دقیق آن توسط انیشتین (1905) می دانیم که فوتون به صورت کوانتا، تابش، طی مسیر جذب می شود!

6/ هم چنین رابطه زیر، فهم مهم مهم de Broigle (1923) را بوجود آورد

(10) $$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \Rightarrow p = mc = h\frac{\nu}{c}$$

↑ تکانه



de Broigle way of thinking.

این ایده را این گونه بیان کرد که برای فوتون می توان ۴-تکانه به صورت زیر تعریف کرد و آن را به ۴-بردار موج wave-vector L^μ ربط داد.

(11) $$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = h\left(\frac{\nu}{c}, \frac{\nu}{c}\hat{n}\right)$$

$$= l^\mu$$

چهاربردار بالا را چهاربردار موج نامیدند. $v = c$ است.

(12) $$l^\mu = \left(\frac{\nu}{c}, \frac{\nu}{V}\hat{n}\right) \quad \text{که} \quad l^\mu l_\mu = \frac{\nu^2}{c^2} - \frac{\nu^2}{V^2}$$

↑ سرعت انتشار موج

حال به نظر می رسد که چهارتکانه فوتون را می توان به صورت زیر نوشت.

(13) $$p^\mu = h l^\mu$$

که بیانگر این است چهاربردار تکانه فوتون Null بودن چهاربردار موج است $p^\mu p_\mu = 0$

$$l^\mu l_\mu \Big|_{\text{فوتون}} = \frac{\nu^2}{c^2} - \frac{\nu^2}{c^2} = 0$$ زیرا

7.1 حال سؤال این است که ۴ بردار موج آیا واقعاً ۴ بردار است. برای جواب به این سؤال ارتباط حرکت آینه عاز موج تخت و بردار موج را به صورت زیر می‌گذاریم.

$$l^\mu = \left(\frac{v}{c} , \frac{v}{V} \hat{n} \right) \quad (14)$$

$$x^\mu = (ct , \vec{x})$$

$$l^\mu x_\mu = \frac{v}{c} ct - \frac{v}{V} \hat{n} \cdot \vec{x} = vt - \frac{\hat{n} \cdot \vec{x}}{\lambda}$$

λ = طول موج

حال این رابطه فوق را در 2π ضرب کنیم.

$$2\pi l^\mu . x_\mu = 2\pi v t - \frac{2\pi}{\lambda} \hat{n} \cdot \vec{x} = \omega t - \vec{K} \cdot \vec{x} \quad (15)$$

این همان فاز موج تخت است. اگر دامنه قدها را در واحد $N\lambda$ در نظر بگیریم. فاز یک کمیت ناوردا خواهد بود. از این رو ۴-بردار موج و به تبع آن چار بردار تکانه فوتون یک کمیت مناسب نسبیتی است. این مسیر قسمت جالبی از داستان ابداع مکانیک موجی Wave-mechanics است.

حال که برای فوتون نیز ۴-تکانه تعریف کردیم. می‌توانیم با دستکاری آن را اصل گرفته و مستقیماً کاستون را حل کنیم.

$$\Sigma^* P^\mu = 0$$

8/

برای فوتون پیش و پس از برخورد خواهیم داشت.

پیش از برخورد

$$p^\mu = h\left(\frac{\nu}{c}, \frac{\hat{n}}{\lambda}\right) \qquad (16)$$

پس از برخورد. در این فضا فوتون بعد از برخورد

$$p'^\mu = h\left(\frac{\nu'}{c}, \frac{\hat{n}'}{\lambda'}\right)$$

و ضرب نا وردا

$$p^\mu p'_\mu = h^2 \frac{\nu\nu'}{c^2} - \frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta \qquad (17)$$

$$= h^2 \frac{1}{\lambda\lambda'}(1-\cos\theta) = \frac{h^2\nu\nu'}{c^2}(1-\cos\theta), \quad \cos\theta = \hat{n}.\hat{n}'$$ که

ضرب های داخلی در مسئله برابر انرژی ν، ν'، θ، m_e (جرم الکترون) است.

زاویه برابر فوتون با محور برخورد θ

۴ تکانه فوتون و Q^μ، Q'^μ ، p^μ، p'^μ

۴ تکانه الکترون، پیش و پس از برخورد است. با پایستگی ۴ تکانه به ما می گوید

$$p^\mu + Q^\mu = p'^\mu + Q'^\mu \qquad (18)$$

برای حل مسائل از این دست، از این تکنیک استفاده می کنیم که هیچ اهمیتی ندارد ذره ای که در محاسبات اهمیت ندارد را (الکترون پس از برخورد) به یک سمت آورده و اندازه حرکت را به دست می آوریم. محاسبات را راحت تر خواهد کرد.

۹،

(19) $$Q'^{\mu}Q'_{\mu} = (P^{\mu} + Q^{\mu} - P'^{\mu})(P_{\mu} + Q_{\mu} - P'_{\mu})$$

$$Q'^{\mu}Q'_{\mu} = P^{\mu}P_{\mu} + P^{\mu}Q_{\mu} - P^{\mu}P'_{\mu} + Q^{\mu}P_{\mu} + Q^{\mu}Q_{\mu}$$

$\rightsquigarrow$ $m_e^2c^2$ (انرژی سکون الکترون برابر است با)

$\rightsquigarrow$ 0 (کمیت فوتون صفر)

$$- Q^{\mu}P'_{\mu} - P'^{\mu}P_{\mu} - P'^{\mu}Q_{\mu} + P'^{\mu}P'_{\mu}$$

(کمیت فوتون صفر)

توجه: dummy بودن اندیس‌ها جمع خواهیم زد است

(20) $$P^{\mu}Q_{\mu} - P'^{\mu}Q_{\mu} - P^{\mu}P'_{\mu} = 0$$

انرژی محاسبه شده است.

(21)
$$P^{\mu} = h\left(\nu/c, \hat{n}/\lambda\right) \qquad P^{\mu}Q_{\mu} = h\nu m_e$$

$$Q^{\mu} = \gamma_{(v=0)}(c, \vec{0})m_0 \qquad P'^{\mu}Q_{\mu} = h\nu' m_e$$

$$P'^{\mu} = h\left(\nu'/c, \hat{n}/\lambda\right)$$

$$P^{\mu}P'_{\mu} = \frac{h^2}{c^2}\nu\nu'(1 - \cos\theta)$$

10,

با جایگذاری روابط (21) در رابطه (20) خواهیم داشت.

$$(22)\qquad h m_e (\nu - \nu') = \frac{h^2}{c^2} \nu\nu' (1 - \cos\theta)$$

حال بر اساس طول موج رابطه کامپتون را می‌نویسیم.

$$\lambda\nu = c \qquad \lambda'\nu' = c$$

$$(23)\qquad h m_e \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'}\right) = h^2 \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda'} (1 - \cos\theta)$$

$$(24)\qquad \boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta)}$$

که (24) رابطه تغییر طول موج کامپتون را نیز به دست می‌دهد.

$$(25)\qquad \lambda_c = \frac{h}{m_e c} \simeq \frac{6.626 \times 10^{-34}\ J.s}{2.998 \times 10^{8}\ m/s \times 9.109 \times 10^{-31}\ kg} = 2.426 \times 10^{-12}\ m$$

$$h \simeq 4.1357 \times 10^{-15}\ eV.s$$

$$m_e \simeq 0.511\ Mev/c^2 \qquad m_e c \simeq 0.511\ Mev/c \simeq 1.704 \times 10^{-3}\ \frac{eV.s}{m}$$

صحت طول موج فوتون - اس بر انرژی به سمع خواهد گرایید.

«پایان»