Special Relativity

Fall 2020

Lecture Note 13

نسبیت خاص

پاییز ۱۳۹۹

درسنامه ۱۳

در ادامه بحث ۴-بردارها شروع خواهیم کرد که کمیت‌های دیگر چاربردار ایجاد کنیم. اولین کمیت ۴-بردار سرعت است. برای این تعریف از بردار $dx^\mu$ استفاده می‌کنیم.

$$(1) \qquad u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

هوشمندانه تغییرات $x$ را با زمان ویژه $d\tau$ مقایسه کرده‌ایم، که یک کمیت ناوردا است. پس واضح است که $u^\mu$ یک چاربردار است و تحت تبدیل لورنتس $u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu$ تبدیل می‌شود.

حال $u^\mu$ را برحسب کمیت‌ها مختصاتی می‌نویسیم.

$$(2) \qquad u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \cdot \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\gamma(v)} = \gamma(v) \frac{d}{dt} \left( c\,dt, d\vec{x} \right)$$

$$(3) \qquad u^\mu = \gamma(v) \left( c, \vec{v} \right)$$

که $\vec{v}$، سرعت ۳-بعدی $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$، $v$، اندازه سرعت ۳-بعدی است و

$\gamma(v) = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$ است.

حال اگر دستگاه لخت را همراه ذره انتخاب کنیم خواهیم داشت

$$(4) \qquad \vec{v}=0 \; \Big| \qquad \longrightarrow \qquad u^{\mu} = (c, \vec{0})$$

Comoving coordinate ; $\gamma(v)=1$

این بدین معنا است که $u^{\mu}$ فقط مولفه زمانی غیر صفر $c$ را دارد.

حال کمیت ناوردا طول چهاربردار سرعت را محاسبه کنیم. این محاسبه را می‌توانیم در دستگاه لخت همراه استفاده کنیم

$$(5) \qquad u^{\mu}u_{\mu} = c^{2}$$

از آن جایی که این کمیت ناوردا است، در تمام دستگاه‌ها نیز یکسان است. برای این که این ادعا را نشان دهیم، در دستگاه لخت دلخواه $u^{\mu}u_{\mu}$ را محاسبه می‌کنیم

$$(6) \qquad u^{\mu}u_{\mu} = \gamma^{2}\left[c^{2} - |\vec{v}|^{2}\right]$$

علامت منفی از متریک مینکوفسکی آمده است

$$\begin{cases} u^{\mu} = \gamma(c, \vec{v}) \\ u_{\mu} = \eta_{\mu\nu}u^{\nu} = \gamma(c, -\vec{v}) \end{cases}$$

$$(7) \qquad u^{\mu}u_{\mu} = \gamma^{2}\left[c^{2}-|\vec{v}|^{2}\right] = \gamma^{2}c^{2}\left[1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}\right] \overset{\text{در نتیجه}}{=} c^{2}$$

که همان نتیجه دلخواه است.

در صورتی که به $u^\mu u_\mu = c^2 > 0$ توجه کنید. به راحتی پیدا است که $u^\mu$ یک چاربردار زمان‌گونه است. در قدم بعد به صورت طبیعی چاربردار شتاب را تعریف می‌کنیم.

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} \tag{8}$$

مجدداً این تعریف هوشمندانه است. زیرا $u^\mu$ چاربردار است و زمان ویژه $d\tau$ نیز لورنتس ناوردا است. حال مولفه‌های شتاب را در مختصه $(t, \vec{x})$ می‌نویسیم.

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \gamma(v)\frac{d}{dt}(\gamma c, \gamma \vec{v}) \tag{9}$$

$$a^\mu = \gamma(\dot{\gamma} c, \dot{\gamma}\vec{v} + \gamma\dot{\vec{v}})$$

رابطه (9) شتاب در دستگاه تخت دلخواه است. حال مجدد به دستگاه مختصات همراه می‌رویم.

$$\vec{v} = 0 \to \begin{cases}\gamma = 1\\ \dot{\gamma} = 0\end{cases} \qquad a^\mu = (0, \dot{\vec{v}}) \tag{10}$$

که $\alpha \equiv \dot{\vec{v}}$ شتاب ویژه تعریف می‌کنیم.

$$a^\mu = (0, \vec{\alpha}) \tag{11}$$

در نتیجه $a^\mu$ یک چاربردار فضاگونه است.

واضح است که کمیت ناوردا $a^\mu a_\mu = |\vec{\alpha}|^2$ شتاب ویژه به توان ۲ است.

4,

محاسبه کمیت ناوردا $a^\mu a_\mu$ در دستگاه همراه بسیار ساده بود. آموزنده است که این کمیت را در دستگاه لخت دلخواه محاسبه کنیم. حجم محاسبات بیشتر می‌شود و نتیجه نهایی قابل پیش‌بینی و زیبا است.

(12)
$$a^\mu = \gamma(\dot\gamma c, \dot\gamma \vec v + \gamma \dot{\vec v})$$
$$a_\mu = \gamma(\dot\gamma c, -(\dot\gamma \vec v + \gamma \dot{\vec v}))$$

$a = \dot{\vec v}$ شتاب در دستگاه $S$ در نظر گرفته‌ایم که رابطه آن با شتاب ویژه به صورت زیر است.

(13)
$$\alpha = \gamma^3 a = \gamma^3 \frac{d}{dt}\vec v$$

این رابطه را در درس‌نامه‌های قبلی نشان داده‌ایم.

(14)
$$a^\mu a_\mu = \gamma^2\left[\dot\gamma^2 c^2 - (\dot\gamma \vec v + \gamma \dot a)^2\right]$$

ابتدا $\dot\gamma$ و ترم داخل پرانتز سمت راست را محاسبه می‌کنیم.

(15)
$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \Rightarrow \dot\gamma = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{c^2}\right)\left(+2\underset{\overset{\parallel}{a}}{\dot v}\, v\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$$

$$\dot\gamma = \frac{av}{c^2}\gamma^3$$

ترم داخل پرانتز برابر خواهد بود با:

(16)
$$\dot\gamma \vec v + \gamma a = \frac{av^2}{c^2}\gamma^3 + \gamma a = \gamma a\left[\frac{v^2}{c^2}\cdot\gamma^2 + 1\right]$$
$$= \gamma a\left[\frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} + 1\right] = \gamma^3 a$$

در نتیجه رابطه (14) به صورت زیر خواهد بود.

$$a^{\mu}a_{\mu} = \gamma^{2}\left[\frac{a^{2}v^{2}}{c^{4}}\gamma^{6}c^{2} - \gamma^{6}a^{2}\right] \tag{17}$$

$$= \gamma^{8}a^{2}\left[\frac{v^{2}}{c^{2}} - 1\right] = -\gamma^{8}a^{2}\gamma^{-2}$$

$$= -(\gamma^{3}a)^{2}$$

از طرف دیگر طبق رابطه (13) خواهیم داشت

$$a^{\mu}a_{\mu} = -\alpha^{2} \tag{18}$$

که همان رابطه‌ای است که در دستگاه مختصات همراه به دست آورده بودیم.

جالب است که در دستگاه همراه با صفر کردن شتاب ویژه $\alpha = 0$ می‌توانید ۴-بردار شتاب را صفر کنید. ولی ۴-بردار $u^{\mu}$ را حتی با صفر کردن $\vec{v}$ نمی‌توان کاملا صفر کرد.

- یک ناوردای دیگر را از ضرب اسکالر دوبردار $u^{\mu}$ ، $a^{\mu}$ به دست می‌آید.

$$a^{\mu}u_{\mu}\Big|_{\vec{v}=0,\ \text{دستگاه همراه}} = (0,\vec{\alpha})\cdot(c,\vec{0}) = 0 \tag{19}$$

این نتیجه در تمامی دستگاه‌ها لخت برقرار است. نتیجه جالب تعمیم این است که می‌توان ضرب یک بردار زمان گونه و یک بردار فضاگونه را صفر داشت.

b)

کمیت بسیار مهم بعدی ۴-بردار تکانه است. ایده تعریف چهار بردار تکانه ساده است

با توجه به تعریف نیوتنی $\vec{p}=m\vec{v}$ پیشنهاد می‌کنیم که چهار-تکانه را به صورت زیر تعریف کنیم

$$p^\mu = m_0\, u^\mu = m_0\,(\gamma c, \gamma \vec{v}) \tag{20}$$

زیراندیس صفر $m_0$ به معنا تعریف جرم سکون یا ویژگی ذاتی intrinsic property خود ذره بنیادی است. تعاریفی از جنس جرم نسبیتی relativistic mass در آینده نزدیک تعریف خواهد شد. از این رو خط قرارداد $m_0$ برای جرم سکون مناسب است.

از سوی دیگر این فرض که $m_0$ یک ناوردای لورنتسی است، در بطن دینامیک نسبیتی قرار دارد.

حال کمیت ناوردای $p^\mu p_\mu$ را بررسی می‌کنیم.

$$p^\mu p_\mu = m_0^2\gamma^2(c^2-v^2) \tag{21}$$

$$= m_0^2 c^2 \underbrace{\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}_{\gamma^{-2}} = m_0^2 c^2$$

جالب است که این نتیجه مهم را با رفتن در دستگاه همراه ذره می‌توانستیم به دست آوریم.

$$(22) \qquad v=0 \to \gamma=1 \qquad p^\mu = m_0\,(c, \vec{0})$$

پس نتیجه مهم این است که

$$p^{\mu}p_{\mu} = m_0^2 c^2 \tag{23}$$

جالب این که این نتیجه برای نور سازگار است. برای فوتون نور داریم

$$\underset{\text{light}}{p^{\mu}} = m_0 \gamma (c, c) \rightarrow p^{\mu}p_{\mu} = 0 \quad \text{Null} \tag{24}$$

که این معادل مفهوم جرم سکون صفر $m_0 = 0$ برای فوتون است.

همان طور که ۴-بردار $x^{\mu}$ معنای عمیقی در ترکیب مفهوم زمان-فضا به همراه داشت

۴-بردار تکانه نیز اهمیت حیاتی دارد. از این رو مولفه صفرم آن را واکاوی می‌کنیم.

$$p^{\mu} = m_0 (\gamma c, \gamma \vec{v}) \tag{25}$$

$$p^0 = m_0 \gamma c = m_0 c \left(1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right)^{-1/2}$$

برای فهم این جمله در حد غیر نسبیتی $v/c \ll 1$ ترم $p^0$ را بسط می‌دهیم.

$$p^0 \simeq m_0 c \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^3\right)\right) \tag{26}$$

حال طرفین تساوی فوق را در "c" ضرب می‌کنیم.

$$p^0 c \simeq m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \cdots \tag{27}$$

نکته جالب توجه این است که $p^0c$ از جنس انرژی است. انیشتین با شهامت آن را انرژی کل یک ذره آزاد (تا پتانسیل گرانشی، الکترومغناطیسی ...) در نظر گرفته شده است، ناصلد از این رو

$$E = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0V^2 + (\text{Next order}\dots) \qquad (28)$$

ترم دوم سمت راست $\frac{1}{2}m_0v^2$ انرژی جنبشی شناخته شده نیوتنی است.

ترم های بالاتر تصحیحات نسبیتی انرژی جنبشی هستند. $m_0c^2$ جرم سکون $\times$ سرعت نور به توان دو و انرژی سکون ذره است. انرژی سکون به خاطر این که اگر $V=0$ باشد $p^0c = E = m_0c^2$ انرژی باقی خواهد ماند.

پس به نظر می رسد که انرژی مولفه صفرم 4 تکانه است.

حال زمان آن رسیده است که جرم نسبیتی را تعریف کنیم.

$$m = \gamma m_0 \qquad (29)$$

با چنین تعریف که سازگار با دستگاه همراه است، چهار تکانه را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$p^\mu = m_0(\gamma c, \gamma\vec{V}) = (mc, m\vec{V}) \qquad (30)$$

حال مجدد به مولفه صفر ۴-گانه توجه کنید.

(31) $$p^0 = mc \quad \rightarrow \quad p^0 c = E = mc^2$$

این همان رابطه معروف انرژی برابر جرم × سرعت نور به توان 2 اینشتین است.

البته با ظرافتی مثال زدنی در توصیف جرم نسبیتی، ۴-گانه و مفهوم $p^\mu$.

از این رو با استفاده از مفهوم ۴-گانه انرژی و سه گانه فضا ($\vec{p} = m\vec{v}$)

جرم نسبیتی

در یک قالب قرار گرفتند. از این رو ۴-گانه به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

(32) $$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

حال کمیت ناوردا برابر است با

(33) $$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2$$

از این رو انرژی یک ذره برابر خواهد بود با

(34) $$E = \left(m_0^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2\right)^{1/2}$$

در دستگاه سکون $|\vec{p}| = 0$ ، $E = m_0 c^2$ خواهد بود، با توصیف جرم نسبیتی خواهیم داشت

(35) $$m = \left(m_0^2 + \frac{|\vec{p}|^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

حال می‌توانیم انرژی جنبشی را نیز تعریف کنیم. $p^0 c$ برابر بود با

$$(36) \qquad p^0 c = E = m_0 c^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} m_0 v^2 + \cdots\right)}_{T}$$

$T$ : انرژی جنبشی

جمله $\frac{1}{2} m_0 v^2$ به اضافه تمام تصحیحات نسبیتی را انرژی جنبشی نامیده پس

$$(37) \qquad E = m_0 c^2 + T$$

از این رو با داشتن تکانه فضایی هر ذره انرژی جنبشی به صورت زیر به دست می‌آید

$$(38) \qquad T = E - m_0 c^2 = \left(m_0^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2\right)^{\frac{1}{2}} - m_0 c^2$$

از طرف دیگر $E = mc^2$ و $m = \gamma m_0$ خواهیم داشت.

$$(39) \qquad T = mc^2 - m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

همچنین رابطه مفید دیگر نسبت $|\vec{p}|$ به انرژی است

$$(40) \qquad \frac{c|\vec{p}|}{E} = \frac{c m \vec{v}}{m c^2} = \beta$$

در نتیجه با دانستن چهاربردار یا $\beta$ می‌توان تکانه فضایی، انرژی کل و انرژی جنبشی را محاسبه کرد!

«پایان درسنامه»