Special Relativity

Fall 2020

Lecture Note 12

نسبیت خاص

پاییز ۱۳۹۹

درسنامه ۱۲

اکنون زمان آن رسیده است که حسابان ۴- برداری معرفی کنیم. ترکیب مفهوم زمان و فضا به خاطر اصول موضوعه نسبیت خاص باعث شده است که این حسابان از اهمیت خاصی برخوردار شود. از سوی دیگر با این دیدگاه ریاضی، مفاهیم عمیق‌تری را در نسبیت خواهیم کاوید.

در حسابان ۳- برداری داریم

(1)

$$X^i = (x, y, z)$$

$i = 1, 2, 3$ به طوری که $X^{i=1} = x \quad X^{i=2} = y \quad X^{i=3} = z$

و کمیت‌های ناوردا از ضرب اسکالر بین دو بردار به دست می‌آیند.

(2)

$$A^i \cdot B^i = A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$$

و طول یک بردار برابر است با $\|A\| = \sqrt{A \cdot A}$ که کمیتی ناوردا است.

برای حسابان چهار- بردار از فاصله دو رویداد A ، B شروع کنیم که A را در مبدأ مختصات فضا- زمان قرار دهیم

(3)

$$B: \quad X^\mu = (ct, x, y, z)$$

X^μ نشان‌دهنده یک ۴- بردار است. اندیس‌های یونانی μ ، برخلاف اندیس‌های لاتین i

از صفر تا ۳ اندیس می‌گیرند: **قسمت زمانی**

$$\mu = 0 , \quad x^0 = ct$$

$$\mu = 1 , \quad x^1 = x$$

$$\mu = 2 , \quad x^2 = y \qquad (4)$$

$$\mu = 3 , \quad x^3 = z$$

همانطور که مشاهده می‌کنید، مولفه صفرم آن را ct قرار داده‌ایم. در متون دیگر شاید $\mu = 4$ را برای مولفه زمانی در نظر گرفته باشند. نوشتن c در مولفه صفرم ۴ بردار، بُعد این کمیت را یکسان و از جنس طول قرار می‌دهد.

پرسش: اما ویژگی ۴ بردار چیست؟ آیا هر مجموعه ۴تایی، تشکیل یک ۴ بردار را می‌دهد؟

ج: تعریف ۴ بردار به صورت ویژه به نسبیت خاص و تبدیلات لورنتس برمی‌گردد. X^μ را ۴ بردار گویند، اگر تحت تبدیل از دستگاه S به دستگاه S' به صورت زیر تبدیل شود.

$$(5) \qquad \underbrace{X'^\mu}_{\text{۴ بردار در دستگاه } S'} = \sum_\nu \Lambda^\mu{}_\nu \underbrace{X^\nu}_{\text{۴ بردار در دستگاه } S}$$

که $\Lambda^\mu{}_\nu$ نماینده مولفه‌ها تبدیل لورنتس است. همان طور که مشاهده می‌کنید اندیس ν که تکراری است بر روی آن جمع بسته می‌شود.

درباره این که چرا اندیس ها بالا/ پایین هستند، اندکی بعد صحبت خواهیم کرد.

فقط در نسبیت خاص توافق می کنیم که اندیس های جمع شونده، یکی بالا و دیگری پایین باشد.

نکته بعدی در نمایش Notation، استفاده از خلاصه نویسی انیشتین است، که در آن برای اندیس هایی که برای جمع داریم، از علامت $\sum$ استفاده نمی کنیم. از این رو

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \qquad (6)$$

حال برای تبدیل لورنتس در پیکربندی استاندارد، عناصر $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ را به دست می آوریم. برای مولفه صفر

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \rightarrow ct' = \gamma(ct - \beta x) \qquad (7)$$

$$x'^{0} = (\gamma)(ct) - (\gamma\beta)(x)$$ که $\beta \equiv v/c$

برای مولفه $\mu = 1$

$$x' = \gamma(x - vt) \rightarrow x' = \gamma(x - \beta(ct)) \qquad (8)$$

$$x'^{1} = (\gamma)(x)^{1} - (\gamma\beta)(x^{0})$$

$$y' = y \rightarrow x'^{2} = x^{2}\,,\quad x'^{3} = x^{3} \qquad (9)$$

در نتیجه نمایش ماتریسی ۴-بردار و تبدیل لورنتس معادل آن را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$x'^{\mu} = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda^{\mu}_{\ \nu}} \underbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{x^{\nu}} \tag{10}$$

همانطور حساب معمولی ۳-بردار، باید به دنبال کمیت های ناوردا باشیم طول یک ۴-بردار A^{μ} که به صورت زیر تعریف می‌شود ناوردا است.

$$\|A\|^2 = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} \tag{11}$$

همین تعریف باعث می‌شود که ما مولفه‌های اندیس پایین «هموردا» "Covariant" را تعریف کنیم.

$$A_{\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} A^{\mu} \tag{12}$$

همان طور که می‌بینید اندیس‌ها با تانسور مینکوفسکی از اندیس بالا «پادوردا» "contravariant" به اندیس پایین «هموردا» تبدیل می‌شود. نمایش ماتریسی تانسور مینکوفسکی به صورت زیر است.

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

نشانگان انتخاب شده $(+,-,-,-)$ است.

نکته بسیار جالب این که x^μ، فضا-زمان و چاربردار جابجایی dx^μ؛ کمیت ناوردای طول آن همان طول فضا-زمان است. به رابطه زیر توجه کنید.

$$(14) \qquad \|dx\|^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = ds^2$$

$$\eta_{00}\, dx^0 dx^0 + \eta_{11}\, dx^1 dx^1 + \eta_{22}\, dx^2 dx^2 + \eta_{33}\, dx^3 dx^3$$

$$= (c\,dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = \Delta s^2$$

به بیان دیگر طول فضا-زمان، ضرب اسکالر نقطه‌ای dx^μ و dx_μ است.

$$(15) \qquad ds^2 = \underbrace{\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu}_{dx_\nu} dx^\nu = dx_\nu\, dx^\nu$$

چاربردارهای پادوردا و هم‌وردا معنای عمیقی در حساب هندسه دیفرانسیل دارند. آن بردارهای فضای - tangent و cotangent هستند. درباره این مفاهیم عمیق و جدی در درس نسبیت عام بحث خواهیم کرد.

این انگاره‌ای است که همراه Ryndler موافق باشیم که این ریاضیات «Tailor-made for special Relativity» است.

و این بیان در جمله مینکوفسکی است که

"Henceforth space by itself and time by itself are doomed and fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality"

ناوردایی طول فضا - زمان، تبدیلات لورنتس و مفهوم ضرب اسکالر ۴-بردار، قید مهمی بر روی تبدیلات لورنتس به صورت زیر می‌گذارد. به روابط زیر دقت کنید.

(16) الف/ $$ds'^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu}\, \Lambda^\mu{}_\alpha\, dx^\alpha\, \Lambda^\nu{}_\beta\, dx^\beta$$

طول فضا زمان در دستگاه S'

ب/ $$ds'^2 = ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\mu\nu}\, \Lambda^\mu{}_\alpha\, \Lambda^\nu{}_\beta\, dx^\alpha dx^\beta$$

در نتیجه خواهیم داشت:

(17) $$\boxed{\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha\, \Lambda^\nu{}_\beta\, \eta_{\mu\nu}}$$

تبدیلات لورنتس باید در این رابطه صدق کنند.

یک نکته دیگر در نمایش ماتریسی طول فضا زمان آن است که در فرم .ها از Transpose (x^μ) استفاده شده است

$$(18)\qquad ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, x^\mu x^\nu$$

$$= (x^\mu)^T \eta_{\mu\nu} (x^\mu)$$

$$= \begin{pmatrix} ct & x & y & z \end{pmatrix}_{1\times 4} \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}_{4\times 4} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{4\times 1}$$

بردارهای پایه «هم وردا» $\hat{e}_\mu$ و «پادوردا» نیز چاربردار هستند، از این رو طبق روابط زیر تبدیل می‌شوند.

$$(19)\quad (a)\qquad \hat{e}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, e^\nu$$

$$(b)\qquad \hat{e}_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu\, \hat{e}_\nu$$

از این رو هر چاربردار، مولفه‌های یک «موجود هندسی» (یک کمیت ناوردا) است.

$$(20)\qquad V = V^\mu \hat{e}_\mu = V_\mu \hat{e}^\mu$$

که در آن پایه‌های فضای tang «$\hat{e}_\mu$» یا cotg $\hat{e}^\mu$ موجود هندسی - اسکالر نیست
سطح داده می‌شود.

حال جالب است که ببینید که چگونه V - موجود هندسی در دو دستگاه S و S' تولید می‌شود.

$$V = V'^{\mu} \hat{e}'_{\mu} \tag{21}$$

در دستگاه S'، موجود هندسی V را برحسب بردارهای پایه بسط داده‌ایم.

حال با تبدیل لورنتس خواهیم داشت.

$$V'^{\mu} \hat{e}'_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} V^{\nu} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \hat{e}_{\alpha} \tag{22}$$

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} V^{\nu} \hat{e}_{\alpha}$$

از آنجائی که $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} = \delta^{\alpha}_{\nu}$ در نتیجه خواهیم داشت.

$$V'^{\mu} \hat{e}'_{\mu} = \delta^{\alpha}_{\nu} V^{\nu} \hat{e}_{\alpha} = V^{\alpha} \hat{e}_{\alpha} = V \tag{23}$$

که برابر است با بسط موجود هندسی V بر پایه‌های فضای tang در دستگاه S.

واضح است که این بسط بر پایه فضای cotg نیز قابل انجام است. از این رو

در دستگاه S'

$$V = V'_{\mu} \hat{e}'^{\mu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} V_{\alpha} \Lambda^{\mu}{}_{\beta} \hat{e}^{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} V_{\alpha} \hat{e}^{\beta} \tag{24}$$

$$= V_{\alpha} \hat{e}^{\alpha} = V \quad \text{در دستگاه } S$$

حال که ۴ بردارها را تعریف کرده ایم. یک بار دیگر تبدیل لورنتس را به زبان ۴ بردار بنویسیم

(25) $$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\, x^{\beta} + a^{\alpha}$$

که a^{α} و $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ ثابتند. a^{α} ثابت انتقال در فضا و زمان (مبدا) است.

به این تبدیلات گروه ناهمگن لورنتس inhomogeneous lorentz group یا گروه پوانکاره Poincaré group گویند. زیر گروه با $a^{\alpha} = 0$ را گروه همگن لورنتس homogeneous lorentz group گویند.

هر دو گروه همگن و غیر همگن لورنتس، زیر گروهی دارد به نام proper $\left\{ \begin{array}{l} \text{homogeneous} \\ \text{inhomogeneous} \end{array} \right\}$ که شرط اضافه‌ای بر روی مولفه های تبدیل لورنتس وجود دارد.

(26) $$\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1 \qquad \mathrm{Det}\,\Lambda = +1$$

این شرط لازم است. زیرا که رابطه (17) داریم

(27) $$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\, \Lambda^{\nu}{}_{\beta}\, \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$$

$$\alpha,\beta = 0,0 \qquad 1 = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha=0}\, \Lambda^{\nu}{}_{\beta=0}\, \eta_{\mu\nu} = (\Lambda^{0}{}_{0})^{2} - \sum_{i=1,2,3} (\Lambda^{i}{}_{0})^{2}$$

در نتیجه

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1,2,3} (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1 \qquad (28)$$

و همچنین از رابطه (17) داریم و این که $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$

$$(\mathrm{Det}\,\Lambda)^2 = +1 \qquad (29)$$

از آنجایی که در تبدیل لورنتس با تغییر پارامترهای $\Lambda^\alpha{}_\beta$ می‌توان تنها بواحد $\delta^\alpha{}_\beta$ را داشت

از این رو در شرط proper-بودن $\Lambda^0{}_0 = +1$ و $\mathrm{Det}\,\Lambda = +1$ الزامی است.

در حالی که "improper lorentz transf." شامل ویژگی‌های زیر است.

(30) Space inversion $\quad \mathrm{Det}\,\Lambda = -1 \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

پاریته

(31) Time Reversal $\quad \mathrm{Det}\,\Lambda = -1 \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1 \quad \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$

(32) Space-Time reversal $\quad \mathrm{Det}\,\Lambda = +1 \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1 \quad \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

که به نظر می‌رسد که هیچکدام از آن‌ها تقارن مثبت نیستند.

آن چه با آن سروکار خواهیم داشت proper homog. lorentz trans. خواهد بود.

« [illegible] »