Special Relativity

Fall 2020

lecture Note 11

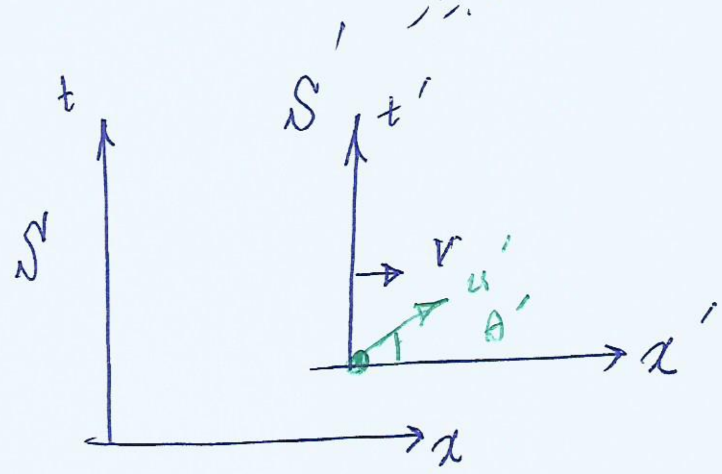
نسبیت خاص

پاییز ۱۳۹۹

درس‌نامه ۱۱

○ نسبیت خاص، تابش سنکروترون « Relativistic beaming and synchrotron radiation »

یکی از مهمترین نتایج الکترودینامیک این است که ذرات شتابدار تابش می‌کنند. هنگامی که سرعت ذرات باردار در طول مسیر تغییر کند، انتظار تابش را خواهیم داشت. یکی از مهمترین تابش‌های اخترفیزیکی تابش سنکروترون است. هرگاه بار الکتریکی حول میدان مغناطیسی دوران کند، این تابش را خواهیم داشت. تابش ترمزی - bremsstrahlung نیز به خاطر اندرکنش کولنی بین الکترون آزاد و هسته است. در بررسی تابش سنکروترون به دلیل سرعت نسبیتی الکترون‌ها باید اثر beaming را در نظر بگیریم. برای بررسی این اثر فرض کنید دو دستگاه مختصات با سرعت v نسبت به یکدیگر در حال حرکتند. جهت حرکت را محور x در نظر بگیرید.



حال جسم در حال حرکت، پرتابه‌ای را با سرعت u' نسبت به دستگاه S' با زاویه θ' را پرتاب می‌کند.

در دستگاه S، ذره متحرک دارای سرعت u و زاویه θ با محور x دارد. در قدم اول همانند مسئله قبلی به دنبال ارتباط بین θ ، θ' هستیم.

در دستگاه S'، ذره را در زمان t' در مختصه (x', y')، در زمان $t'+dt'$ در مختصه $(x'+dx', y'+dy')$ می‌یابیم. از دید ناظر S در زمان t , $t+dt$ به ترتیب ذره را در (x, y) , $(x+dx, y+dy)$ خواهیم یافت.

از تبدیلات استاندارد لورنتس داریم.

$$(1) \quad \begin{cases} dx = \gamma(dx' + v\,dt') \\ dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right) \\ dy = dy' \end{cases} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

با تقسیم دیفرانسیل‌ها به زمان خواهیم داشت:

$$(2) \quad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} \qquad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right)}$$

که $\begin{cases} u'_x = \frac{dx'}{dt'} \\ u'_y = dy'/dt' \end{cases}$, $\begin{cases} u_x = \frac{dx}{dt} \\ u_y = dy/dt \end{cases}$

در نتیجه زاویه ذره در دستگاه S از تقسیم u_y/u_x به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$\text{(3)} \quad tg\,\theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{u'_y}{\gamma(u'_x + v)}$$

با توجه به این که
$$\left.\begin{aligned} u'_x &= u'\cos\theta' \\ u'_y &= u'\sin\theta' \end{aligned}\right\}$$
خواهیم داشت.

$$\text{(4)} \quad tg\,\theta = \frac{u'\sin\theta'}{\gamma(u'\cos\theta' + v)}$$

درصورتی که پرتابه، پرتو نور باشد ($u' = c$) خواهیم داشت.

$$\text{(5)} \quad tg\,\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(\cos\theta' + v/c)}$$

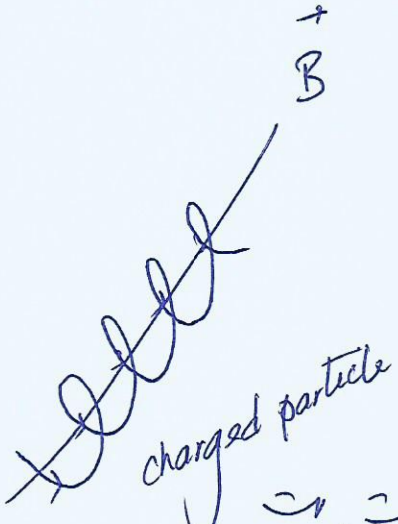
واضح است که زاویه θ کوچکتر از θ' است. به عنوان مثال خاص، فرض کنید که منبع تحرک پرتو نور را در زاویه $\theta' = \pi/2$ ساطع کند. در این صورت

$$\text{(6)} \quad Tg\,\theta = \frac{c}{\gamma v}$$

درصورتی که منبع با سرعت بسیار زیاد حرکت کند به طوری که $v \sim c$ در این صورت $\gamma \gg 1$، θ بسیار کوچک به اندازه $\theta \sim 1/\gamma$ خواهد بود. این بدین معنا است که یک منبع نسبیتی، حتی اگر به صورت همسانگرد نیز تابش کند، ناظر که پرتوهای نور را در یک مخروط نوری با زاویه $1/\gamma$ خواهد دید.

4,

به این اثر نسبیتی beaming effect می‌گویند. که در بسیاری از مثال‌های اخترفیزیکی مهم می‌شود.



حال فرض کنید که یک ذره باردار حول یک میدان مغناطیسی دوران می‌کند در کتاب‌های استاندارد الکترودینامیک، تابش سنکروترون محاسبه شده است. برای ذره‌ای که با سرعت نسبیتی حول میدان مغناطیسی دوران می‌کند. توان از دست داده به خاطر تابش به صورت زیر است.

$$P = \frac{4}{3}\sigma_T c \gamma^2 U_B \quad (7)$$

که $U_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$ چگالی انرژی مغناطیسی است و σ_T سطح مقطع تامسون است

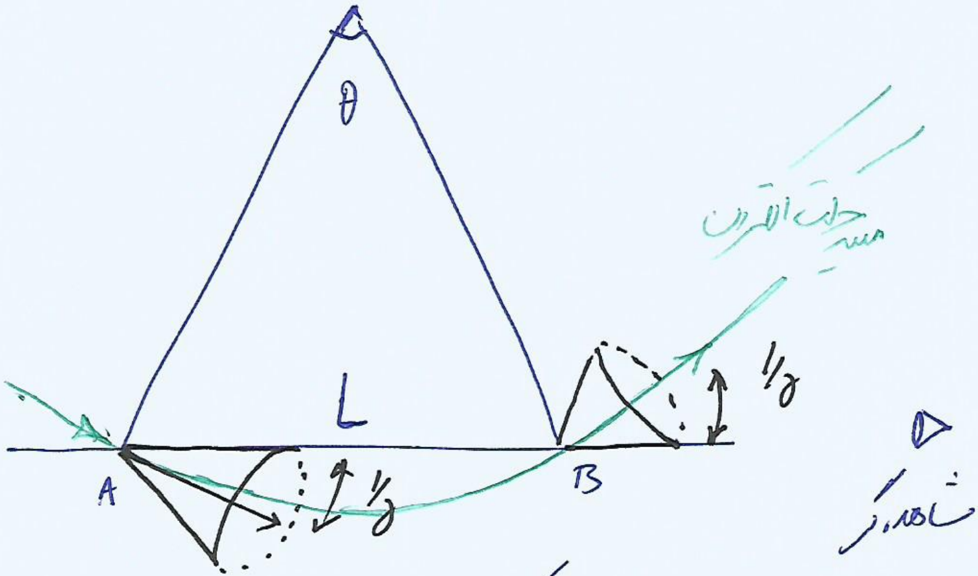
$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}\right)^2 \quad (8)$$

از رابطه (7)، (8) مشهود است که الکترون‌ها به صورت موثر تابش می‌کنند زیرا $P \propto 1/m^2$

به خاطر اثر relativistic beaming، تمام تابش در جهت حرکت الکترون با زاویه مخروط $1/\gamma$ خواهد بود.

حال اگر ناظر در راستای این مخروط باشد یک تپ نور را خواهد دید.

شکل زیر نشان می‌دهد که یک الکترون حرکت دورانی انجام می‌دهد. قسمتی از شکل
را که ناظر پرتو را می‌بیند ترسیم شده است



مشاهده‌گر از نقطه A شروع به دریافت پرتو می‌کند تا نقطه B که مخروط نوری از دید خارج می‌شود.

در ادامه این زمان را که ناظر پرتو را دریافت می‌کند محاسبه می‌کنیم

درصورتی که زاویه θ کوچک باشد، L برابر کمان رو به رو است. درصورتی که الکترون
با سرعت v حرکت کند. زمان L/v را بین دو نقطه A ، B طی می‌کند. همچنین زمان
تابش از B به اندازه L/c کمتر است. درنتیجه

$$\underbrace{\Delta t}_{\text{زمان تابش}} = \frac{L}{v} - \frac{L}{c} = \frac{L}{v}\left(1 - \frac{v}{c}\right) \qquad (9)$$

فرکانس دوران الکترون حول میدان مغناطیسی B که دارای جرم m_e و بار e باشد
برابر است با

6/

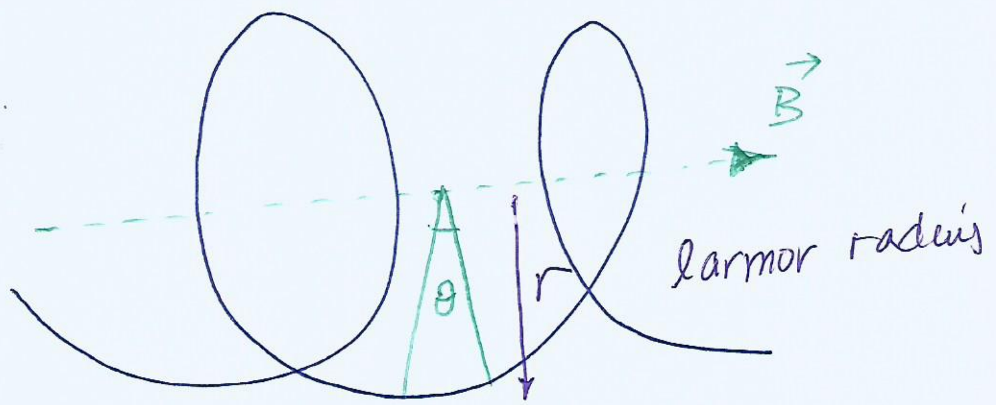
(10) $$\omega_g = \frac{Be}{\gamma m_e}$$

که g نماینده‌ی gyrating دوران است. به کتاب Jackson, ED, 2001 مراجعه کنید. که فاکتور γ، به دلیل حرکت نسبیتی الکترون است به بیان

(11) $$\omega_g = \frac{\omega_{g,nr}}{\gamma} \quad , \quad \omega_{g,nr} = \frac{Be}{m_e}$$

به غیر نسبیتی است.

از آن جایی که حرکت سنکروترون است $\theta \approx \frac{2}{\gamma}$ است (relativistic beaming)، θ قطاعی از



از این رو خواهیم داشت، توجه رابطه ۹

(12)
$$\begin{cases} \dfrac{L}{v} = \dfrac{\theta}{v/r} \approx \dfrac{2/\gamma}{\omega_{g,nr}/\gamma} \approx \dfrac{2}{\omega_{g,nr}} \\[2ex] 1 - v/c = \dfrac{1 - v^2/c^2}{1 + v/c} \approx \dfrac{1}{2\gamma^2} \end{cases}$$

به شرط $v \approx c$

در این صورت زمان تابش تقریباً برابر خواهد بود با

$$\Delta t \approx \frac{1}{\gamma^2 \omega_{g,nr}} \quad (13)$$

این بدین معنا است که الکترون در هر دوره تناوب در بازه زمانی Δt تابش می‌کند. اگر تبدیل فوریه سیگنال را محاسبه کنیم، طیف در فرکانس $\gamma^2 \omega_{g,nr}$، قله خواهد داشت.

اگر به جای یک الکترون، فرض کنیم که مجموعه‌ای از الکترون‌ها با توزیع انرژی زیر داشته باشیم

$$N(E)\, dE \propto E^{-p}\, dE \quad (14)$$

که p اندیس شاخص انرژی و ثابت است. برای همه الکترون‌ها $\omega_{g,nr} = \frac{Be}{m_e}$ ثابت و مستقل از انرژی است. از این رو فرکانس قطع به γ^2 ربط دارد.

در راستای نزدیک رابطه معروف $E = m_e \gamma c^2$ را به دست خواهیم آورد.

از این رو، توزیع فرکانس برابر است با

$$\nu = C E^2 \quad (15)$$

C: مقدار ثابت

$$d\nu = C\, 2E\, dE \rightarrow dE = \frac{d\nu}{2C\sqrt{\nu/C}} = \frac{d\nu}{2\sqrt{C\nu}} \quad (16)$$

در نتیجه

این بدین معنا است که الکترون هایی که انرژی در بازه E ، $E+dE$ دارند

در بازه فرکانسی ν ، $\nu+d\nu$ با تندی $dE = \frac{d\nu}{2\sqrt{c\nu}}$ تابش می کنند

با توجه به این که $P = \frac{4}{3}\sigma_T c \gamma^2 u_B$ است، $(\gamma \propto E)$

توان تابشی متناسب با E^2 است، از این رو

$$\text{توان تابشی توزیع الکترون ها} \propto E^2 E^{-p} dE \tag{17}$$

$$\propto \frac{\nu}{c} \left(\frac{\nu}{c}\right)^{-p/2} \frac{d\nu}{2\sqrt{c\nu}} \tag{18}$$

$$f(\nu)\, d\nu \propto \nu^{-s} d\nu \tag{19}$$

که $s = \frac{p-1}{2}$ است. این نتیجه بسیار مهم است. اگر توزیع انرژی الکترون ها توانی با p باشد تابش سنکروترون با توان s خواهیم داشت

به طور معمول $p \sim 2.6$ در نتیجه تابش سنکروترون توزیع با توان فرکانسی 0.8 خواهد داشت

از این رو تابش مشاهده (ویژگی این بخش) با اندیس توان نزدیک به 0.8 نشانه تابش الکترون بجهت سنکروترون وجود میدان مغناطیسی است

«پایان درس نامه» Astrophysics for physicists, Arnab Rai Choudhuri
Cambridge Uni. Press - 2010