1

Special Relativity

Fall 2020

lecture Note 9

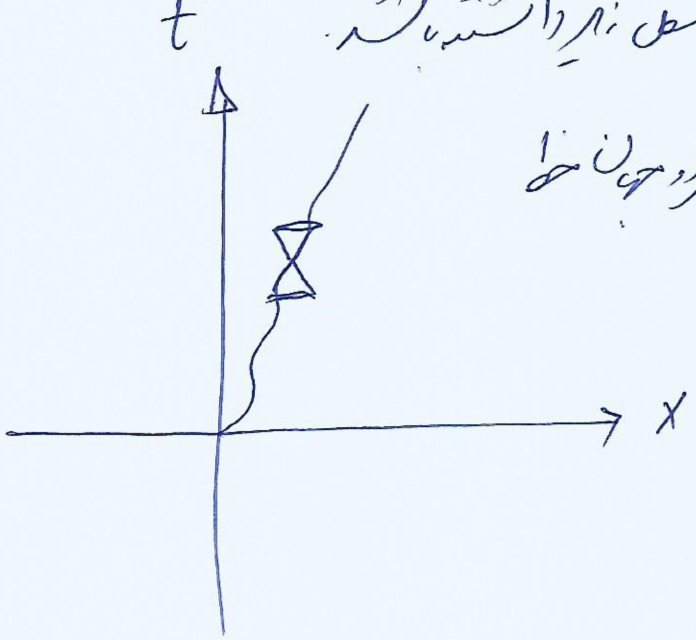
نسبیت خاص

پاییز ۱۳۹۹

جلسه ۹

در این درسنامه به بررسی حرکت شتابدار از دیدگاه نسبیت خاص خواهیم پرداخت.

ناظر می‌تواند حرکت پیچیده‌ای را همانند شکل زیر داشته باشد



که در هر نقطه می‌توان مخروط نوری را رسم کرد و جهان خط

در مخروط نوری آینده قرار خواهد گرفت.

برای محاسبه شتاب از تبدیلات سرعت

استفاده می‌کنیم.

$$dx' = \gamma(dx - v\,dt)$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v\,dx}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{dx'}{dt'} = \frac{dt\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\gamma\,dt\left(1 - v\frac{dx}{dt}\frac{1}{c^2}\right)}$$

بطور مشابه

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \quad ; \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)} \quad ; \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}$$

همچنین تعریف می‌کنیم

$$D \equiv 1 - \frac{v u_x}{c^2}$$

حال از سرعت در راستای x، دیفرانسیل خواهیم گرفت. به جزء تقسیم ساده زیر توجه کنید.

$$du'_x = \frac{(du_x)D - \left(-\frac{v}{c^2}du_x\right)(u_x - v)}{D^2}$$

$$= \frac{(du_x)D + \frac{v}{c^2}(u_x - v)\,du_x}{D^2}$$

$$dt' = \gamma(dt)\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right) = \gamma\, dt\, D$$

$$a'_x = \frac{1}{\gamma D^3}\left(\frac{du_x}{dt}D + \frac{v}{c^2}(u_x - v)\frac{du_x}{dt}\right).$$

$\downarrow$

شتاب در دستگاه S'

$$= \frac{1}{\gamma D^3}\, a_x \underbrace{\left[D + (u_x - v)\frac{v}{c^2}\right]}_{A}$$

ترم داخل کروشه :

$$A: \; D + (u_x - v)\frac{v}{c^2} = 1 - \cancel{\frac{v u_x}{c^2}} + \cancel{\frac{u_x v}{c^2}} - \frac{v^2}{c^2}$$

$$= \gamma^{-2}$$

در نتیجه

$$a'_x = \frac{1}{\gamma^3 D^3}\, a_x$$

3,

دیفرانسیل سرعت در جهت y , z را حساب می‌کنیم

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma D} \rightarrow du'_y = \frac{du_y \gamma D - u_y \gamma \left(-\frac{v}{c^2} du_x\right)}{\gamma^2 D^2}$$

$$dt' = \gamma D \, dt$$

$$a'_y = \frac{du'_y}{dt'} = \frac{1}{\gamma^3 D^3}\left[\gamma D \underbrace{\frac{du_y}{dt}}_{a_y} + \frac{v}{c^2}\gamma u_y \underbrace{\frac{du_x}{dt}}_{a_x}\right]$$

$$\boxed{a'_y = \frac{1}{\gamma^2 D^2} a_y + \frac{a_x u_y v}{c^2 \gamma^2 D^3}}$$

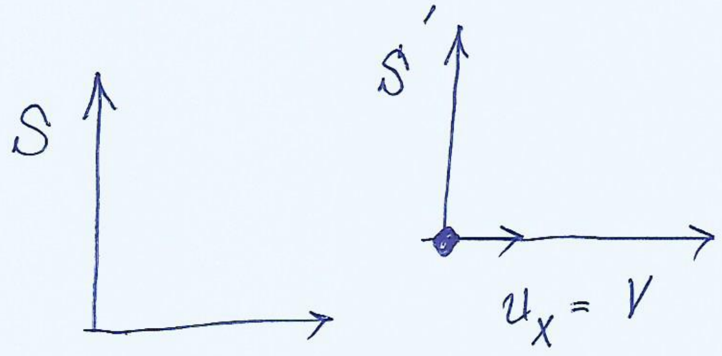
و به طور مشابه

$$\boxed{a'_z = \frac{1}{\gamma^2 D^2} a_z + \frac{a_x u_z v}{c^2 \gamma^2 D^3}}$$

اگر $c \rightarrow \infty$ برود، تبدیلات گالیله بدست خواهد آمد. این به این معنا است که تبدیلات لورنتس، ناوردایی شتاب را همانند تبدیلات گالیله ندارند.

4

حال فرض کنید که دستگاه S' را بر روی ذره شتابدار قرار دهیم و این دو دستگاه را
از پیکربندی استاندارد (مبدا مکان و زمان یکسان) و حرکت در راستای x در نظر بگیریم.



در این صورت ناظر S' شتاب همراه proper acceleration را اندازه گیری می کند

از این رو

$$D = 1 - \frac{V u_x}{c^2}\Big|_{u_x = V} = \gamma^{-2}$$

در نتیجه

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3 D^3}\Big|_{u_x = V} = \gamma^3 \frac{du_x}{dt} = \gamma^3 \frac{dV}{dt}$$

حال با یک جبر ساده می خواهیم نشان دهیم

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma(V)\, V\right] = \gamma^3 \frac{dV}{dt}$$

$$\to \frac{d}{dt}\left[\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} V\right] = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{c^2}\frac{dV}{dt}\right)(V)^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-3/2} + \frac{dV}{dt}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\gamma(v)\, v\right] = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left[\cancel{\frac{v^2}{c^2}\frac{dv}{dt}} + \frac{dv}{dt} - \cancel{\frac{v^2}{c^2}\frac{dv}{dt}}\right]$$

$$= \gamma^3 \frac{dv}{dt}$$

درنتیجه

$$\alpha = \gamma^3 \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\gamma(u)\, u\right)$$

$\downarrow$

شتاب همراه جسم

v , u معادلند !

این شتاب، همان شتابی است که در دستگاه همراه (مانند کابین یا پیستون همراه) اندازه‌گیری می‌شود

یک حرکت جالب توجه، حرکت با شتاب همراه ثابت است

که از زمان صفر از سکون از مبدأ مختصات شروع

به حرکت می‌کند. درنتیجه

$$\alpha = cte$$

$$t=0 ,\ u=0 ,\ x=0$$

$$\alpha t = \gamma(u)\, u$$

حال این معادله را برحسب $u \equiv dx/dt$ بازنویسی می‌کنیم و با شرایط اولیه $(t=0, x=0)$

مسیر این ذره شتابدار با شتاب ثابت را پیدا می‌کنیم

توان دو این رابطه و نوشتن $u = \frac{dx}{dt}$ خواهیم داشت.

$$\alpha t = \frac{u}{\left(1 - u^2/c^2\right)^{1/2}}$$

$$\alpha^2 t^2 = \frac{u^2}{1 - u^2/c^2} \rightarrow \alpha^2 t^2 - \frac{\alpha^2 t^2 u^2}{c^2} = u^2$$

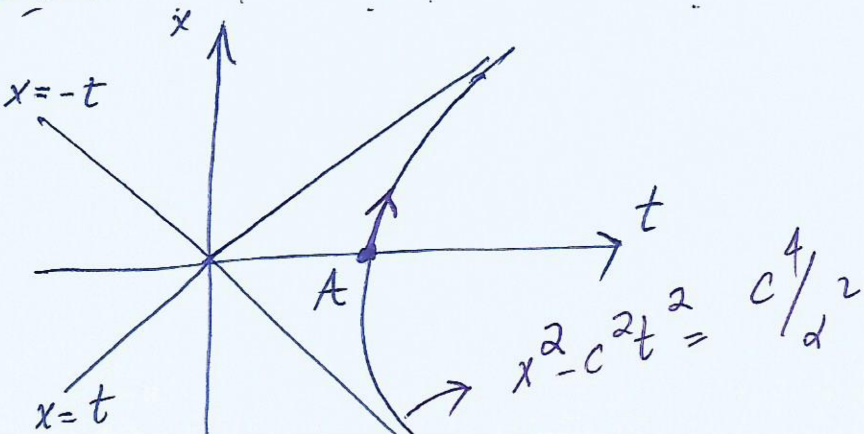
$$\rightarrow u^2\left(1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}\right) = \alpha^2 t^2 \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha t}{\left(1 + \alpha^2 t^2/c^2\right)^{1/2}}$$

$$x = \int_0^t \frac{\alpha t \, dt}{\left(1 + \alpha^2 t^2/c^2\right)^{1/2}}$$

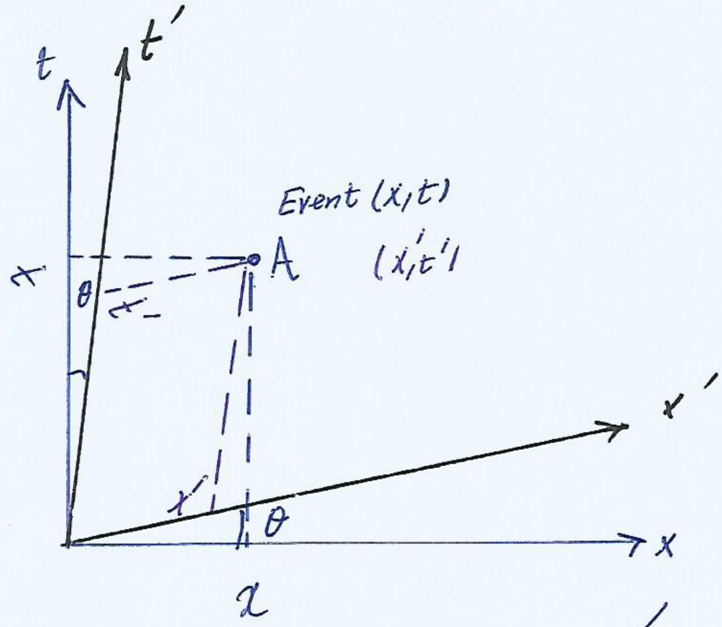
که جواب این انتگرال با شرایط اولیه از پیش تعیین شده به صورت زیر است.

$$\boxed{x^2 - c^2 t^2 = c^4/\alpha^2}$$

چنین پیدا است که مسیر خط ذره شتابدار با شتاب ثابت از دید ناظر S هذلولی گون است.

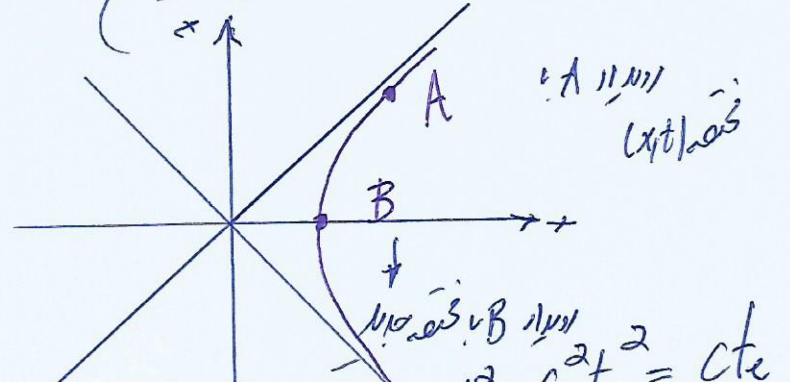


حال این که مسیر حرکت ذره شتابدار، ارتباط تنگاتنگی با تبدیل مختصات با تبدیلات لورنتس در مورد فضازمان دارد. تاکنون نگاه "passive" را برای تبدیل مختصات استفاده کرده ایم به این معنا که نقطه (رویداد) در فضا زمان ثابت است و مختصات را تغییر داده ایم. این بدین معناست که برای هر رویداد علاوه بر حسب مختصات (x, t) ، (x', t') را داریم.



نحوه دیگر نگاه به تبدیلات لورنتس، می‌تواند نگاه فعال باشد "active coordinate transformation" این بدان معناست که نقطه (رویداد) جابه‌جا می‌شود. (همانند جابه‌جایی نقطه در هندسه اقلیدسی تحت دوران)

حال در تبدیلات لورنتس جابه‌جایی نقطه معادل تغییر x, t به x' و t' است به گونه ای که طول فضا زمانی آن ثابت بماند، $ct'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$ (همانند حرکت هذلولی گون شتابدار



ارتباط بین مسیر ذرات شتابدار، از دید ناظر S، ارتباط آن با تغییر مختصات و عدم وابستگی قسمتی از فضا-زمان توسط ناظر شتابدار را در ادامه درس بیشتر واکاوی خواهیم کرد.

در ادامه به بررسی rapidity و ساختار فضا-زمان نسبیت خاص می‌پردازیم.

در درس نامه قبل نشان دادیم

$$ct' + x' = e^{-\phi}(ct + x)$$

$$ct' - x' = e^{\phi}(ct - x)$$

که $\begin{cases} e^{\phi} = \gamma(1 + v/c) \\ e^{-\phi} = \gamma(1 - v/c) \end{cases}$ است. حال اگر دو طرف روابط فوق را در هم ضرب کنیم

طول ناوردای فضا-زمان به دست می‌آید.

$$c^2t'^2 - x'^2 = \underbrace{e^{-\phi}e^{\phi}}_{1}(c^2t^2 - x^2)$$

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$$

حال محورهای مختصات جدید نورگونه یا light-like-cone را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

مختصات هنجار استاندارد

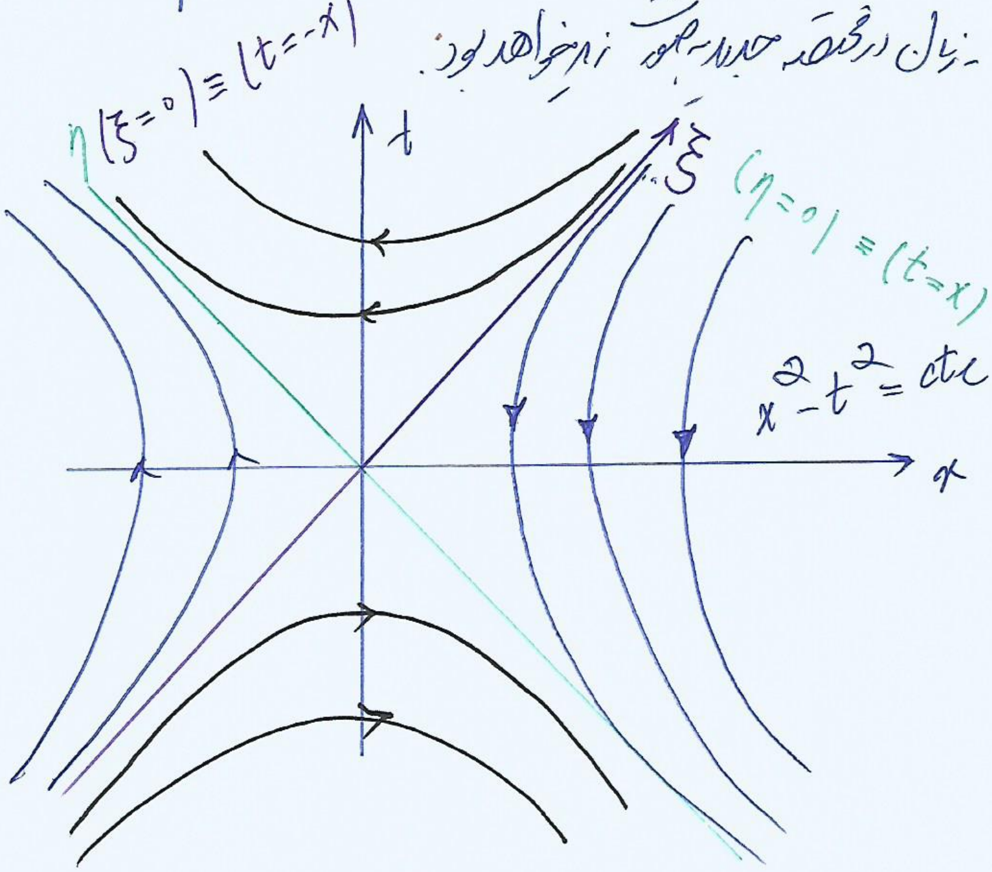
$$\xi = \frac{t + x}{\sqrt{2}} \qquad \eta = \frac{t - x}{\sqrt{2}}$$

با این تعریف تبدیلات لورنتس به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} \xi' = e^{-\phi}\,\xi \\ \eta' = e^{\phi}\,\eta \end{cases}$$

و کمیت ناوردا $\xi'\eta' = \xi\eta$ است.

نمودار فضا ـ زمان در مختصات جدید به صورت زیر خواهد بود.



با توجه به تعریف ضریب e^{ϕ} خواهیم داشت.

$$e^{\phi} = \frac{1+v/c}{\left(1-(v/c)^2\right)^{1/2}} = \frac{(1+v/c)^{1/2}}{(1-v/c)^{1/2}}$$

$$\phi = \log\left[\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)^{1/2}\right]$$

10/

$$\tanh\phi = \frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{e^{\phi} + e^{-\phi}} = \frac{\gamma(1+ v/c) - \gamma(1- v/c)}{\gamma(1+ v/c) + \gamma(1- v/c)}$$

$$= \frac{2\gamma\, v/c}{2\gamma} = v/c \equiv \beta$$

در نتیجه $\beta = \tanh\phi$. حال با این تعریف رابطه جمع سرعت را نگاه کنید.

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}} \to V/c \equiv \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$

که می‌دانیم

$$V/c = \beta \equiv \frac{\tanh\phi_1 + \tanh\phi_2}{1 + \tanh\phi_1 \tanh\phi_2} = \tanh(\phi_1 + \phi_2)$$

$$\beta \equiv \tanh\phi = \tanh(\phi_1 + \phi_2)$$

این بدین معنا است که $\phi = \phi_1 + \phi_2$ در نتیجه تبدیلات لورنتس را به صورت گروه با پارامتر ϕ در نظر بگیرید که بسته بودن، شرکت‌پذیری، عنصر خنثی و عضو معکوس معادل گروه‌ها Φ با تکمیل جمع را.

پس درس‌نامه را با اشاره مجدد به ویژگی گروه بودن تبدیلات لورنتس، تقارن بین x و ct، ناوردایی طول فضا-زمان و بنیادی بودن مفهوم فضا-زمان به اتمام می‌رسانیم.

« پایان درس‌نامه ۴ »