1

Special Relativity

Fall 2020

Lecture Note 8

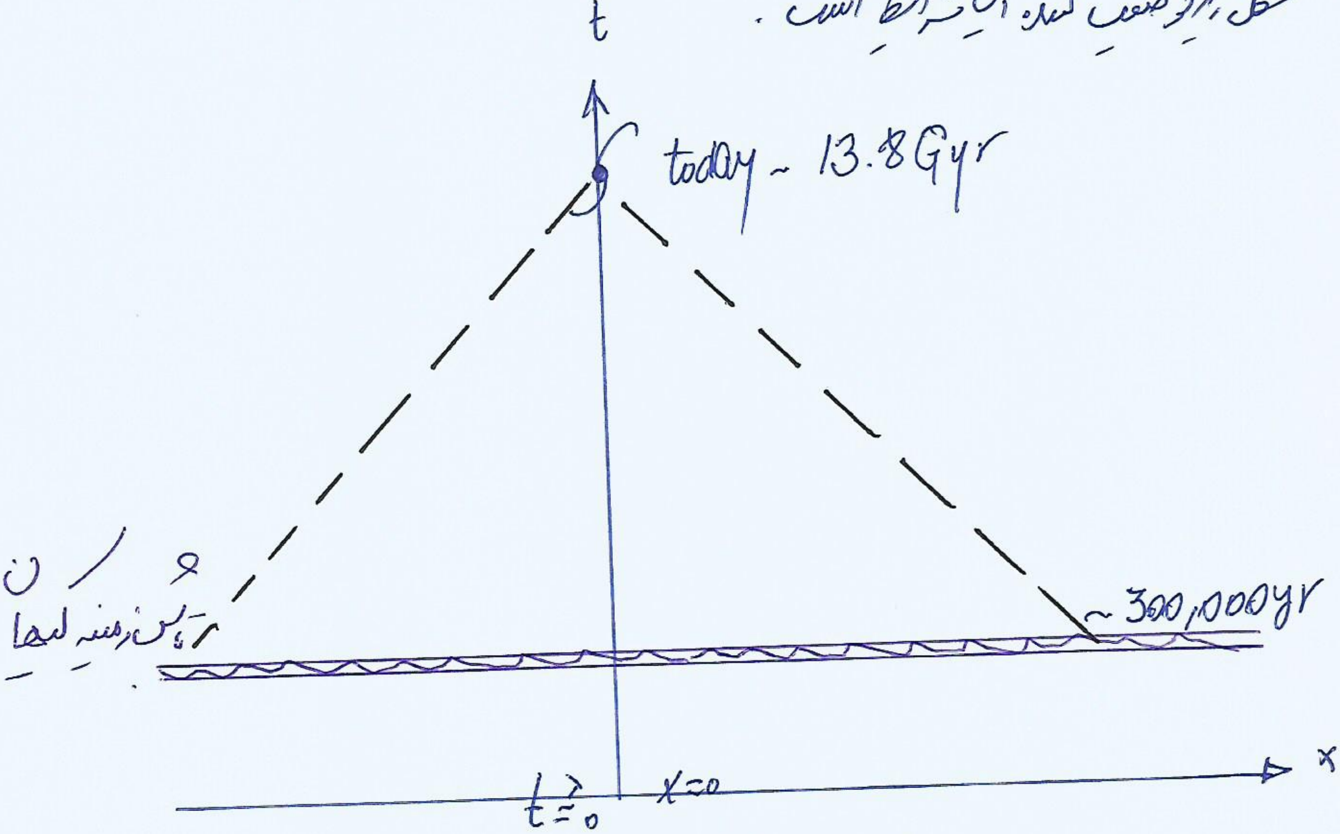
نسبیت خاص

پاییز ۱۳۹۹

جلسه ۸

□ تابش زمینه کیهان و نسبیت خاص

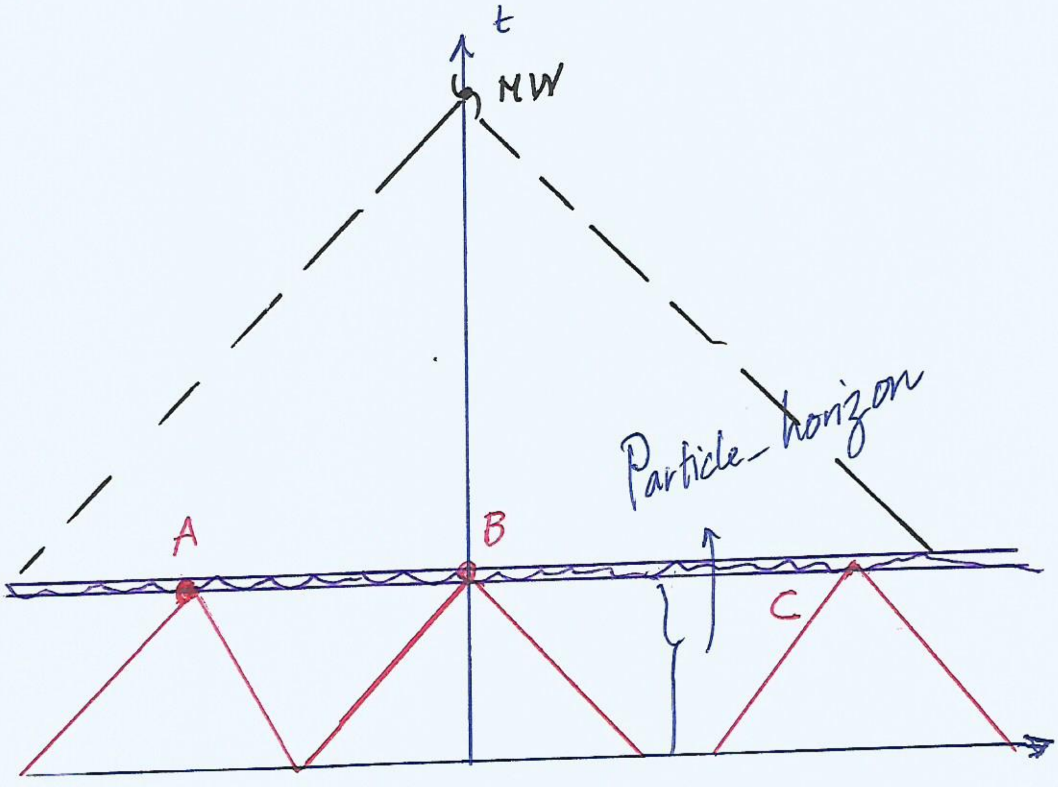
در درس‌نامه قبل به بررسی پدیده CMB پرداختیم. این مشاهده در راستای تایید این ایده، که مهبانگ به‌عنوان مدلی که شروعی برای کیهان در نظر دارد، گزینه مناسبی است. از این رو نمودار فضا-زمان دارای شروعی می‌باشد و از سمت زمان به منفی بی‌نهایت نمی‌رسد. شکل زیر توصیف کننده این شرایط است.



نمودار از $t=0$ شروع می‌شود. یک اتفاق تقریباً هم‌زمان در 300,000yr پس از شروع کیهان اتفاق می‌افتد و ما هم‌اکنون 13.8 Gyr بعد از گسیل شدن آن را در $x=0$ نظاره‌گر هستیم.

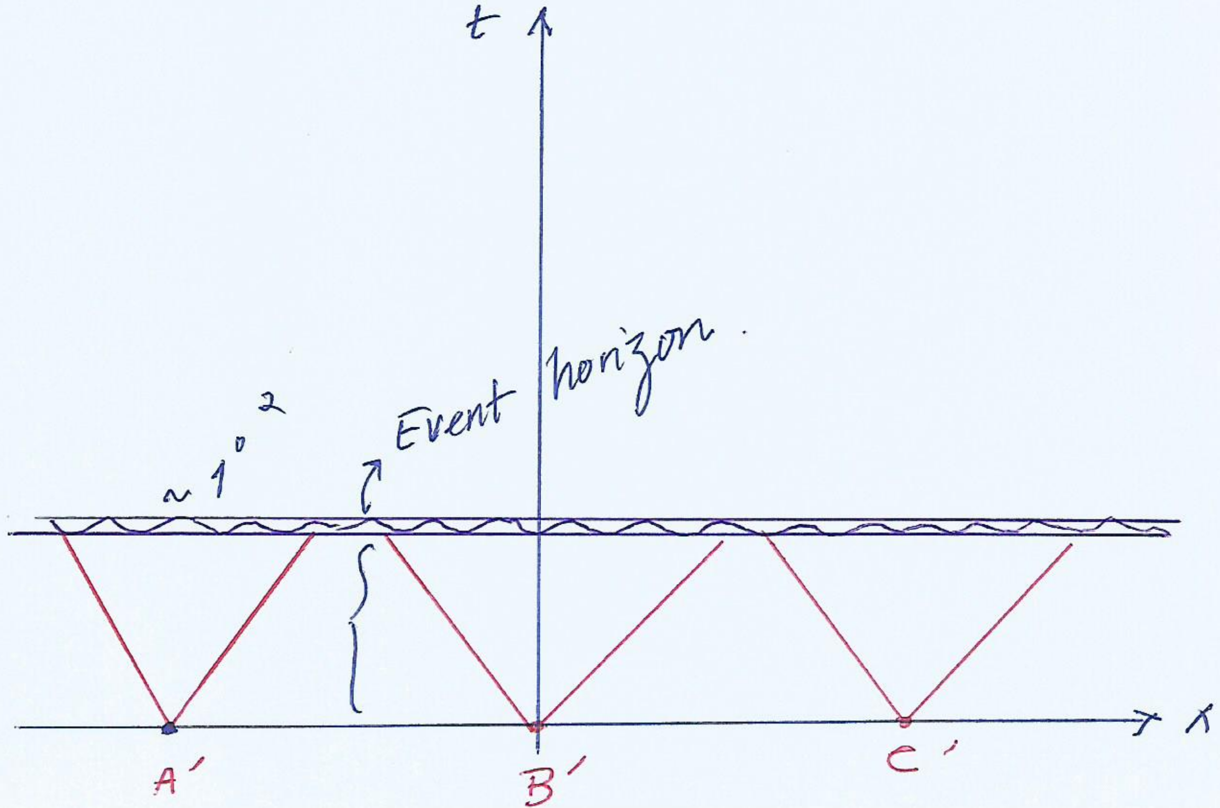
خط چین مشکی، نشانگر مخروط نوری گذشته است و آن‌چه در داخل این مخروط نوری قرار دارد به آن جهان مشاهده‌پذیر "Observable Universe" می‌گویند.
(عالم)

اما معمای اصلی یکنواختی تابش زمینه کیهانی آن است که تمام سطح آن با دقت 1 در 10^5 همدما است! و این عجیب است! اگر مخروط نوری گذشته تابش زمینه کیهانی را برای نقاط مختلف رسم کنید، این مخروط‌های نوری همدیگر را قطع نمی‌کنند. به بیانی دیگر این نقاط (نواحی) از کیهان فرصت (زمان) کافی برای تبادل و همدما شدن و قرار گرفتن در تعادل ترمودینامیکی را نداشتند. در این راستا شکل زیر را ملاحظه کنید.



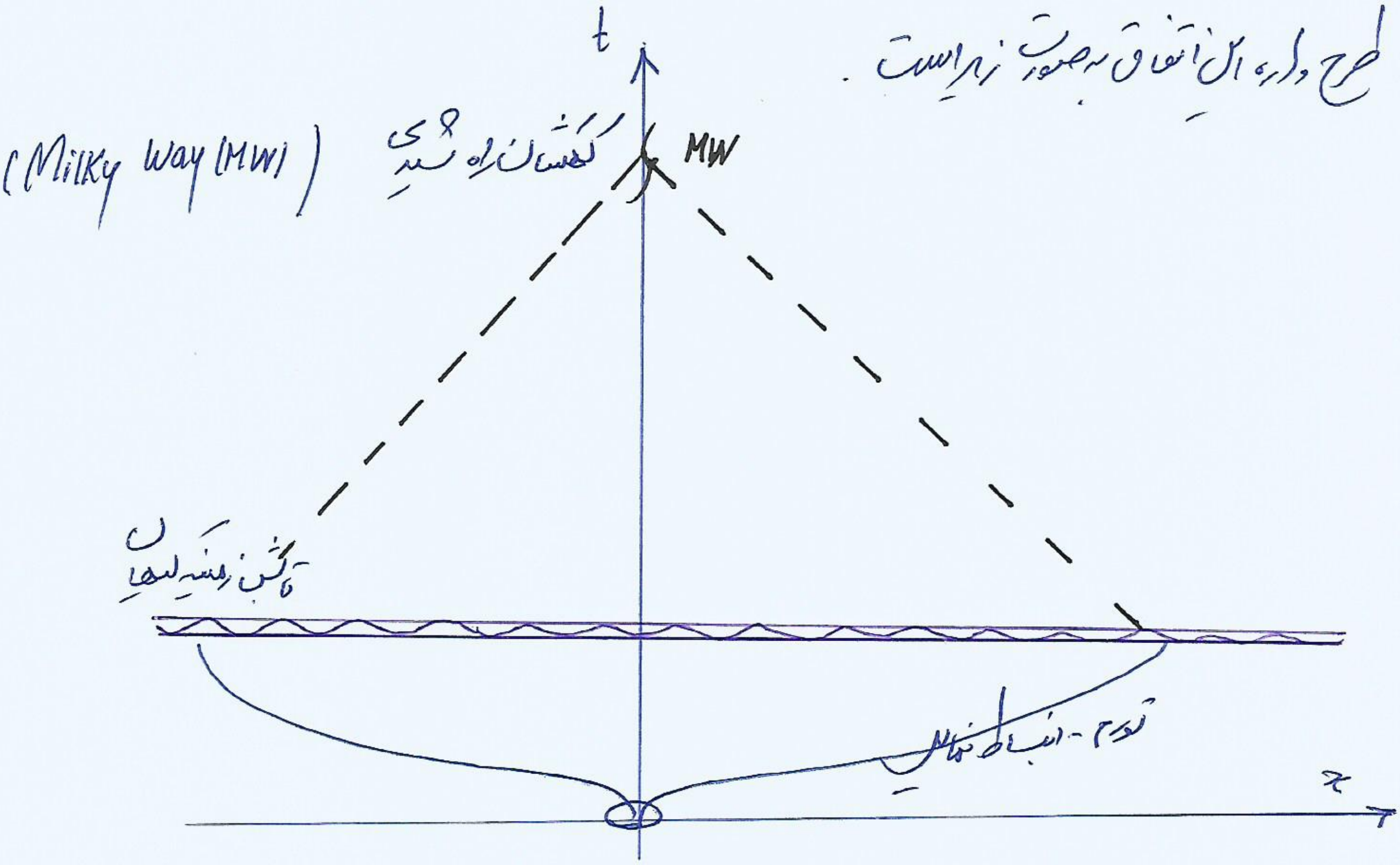
نقاط A ، B ، C و ... نمونه های دیگر مخروط نوری گذشته ای که با یکدیگر در تداخل باشند ندارند.
به این مسئله «مسئله افق» "Horizon Problem" می گویند. این مسئله از همان زمان
که داده های بزرگ مقیاس تابش زمینه کیهانی در دسترس بود، ظاهر شد. به این افق، افق ذره
"particle Horizon" می گویند. این مسئله را از دید دیگری نیز می توان بررسی کرد.

فرض کنید در زمان بسیار نزدیک به شروع رویدادهای A' ، B' و C' را داشته باشیم.
آنگاه افق رویداد "Event horizon" این نقاط را رسم می کنیم. این افق
رویداد بسیار کوچک و از مرتبه ($1^{\circ 2}$) است. در حالی که کل آسمان $\sim 42000\ deg^2$ است.
«مسئله افق» بدین صورت مطرح می شود که به نظر می رسد تنظیم ظریفی رخ داده است که کل تابش
زمینه کیهانی همدما شده است. به شکل زیر توجه کنید



این مسئله (معما) عمیق کیهان شناسی ارتباط نزدیکی با مسئله مخروط نوری گذشته، مفهوم علیت در نسبیت خاص دارد. یکی از گزاره های موجود برای حل این مسئله پیشنهاد «تورم کیهانی» "Cosmic Inflation" است. با این ایده که در آغاز کیهان در بازه زمانی بسیار کوتاهی کیهان در فاز انبساط تندشونده بوده است و به صورت نمایی، ناحیه ای از کیهان به شدت رشد کرده است. این ناحیه می تواند شرایط اولیه ای داشته باشد و با رشد نمایی این ناحیه تبدیل به کل عالم مشاهده پذیر می شود.

طرح واره این اتفاق به صورت زیر است.



توجه داشته باشید که نمودارهای فضا زمان با زمان همراه کشیده می شود و این موضوع مسئله افق جزئیات و دقت بیشتری لازم دارد. در انتهای درسنامه طراحی چند نمودار می گردد.

□ تبدیلات سرعت در نسبیت خاص

سرعت ها در دو دستگاه لخت S و S' به شکل زیر تعریف می شوند.

(1)
$$\text{در دستگاه } S \quad \vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$
$$\text{در دستگاه } S' \quad \vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right)$$

توجه داشته باشید که مختصات و زمان هر دو در یک لحظه تعریف شده است. در صورتی که یک موجود فیزیکی در دستگاه S حرکت کند $u < c$ است. اگر این شرط برقرار نباشد، روابطی که در ذیل به دست می آید، فاصله هندسی دو رویداد می باشد.

فرض کنید دو دستگاه در پیکربندی استاندارد باشند، در این صورت خواهیم داشت.

(2)
$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - v\,dt) \\ dt' = \gamma\left(dt - \dfrac{v\,dx}{c^2}\right) = \gamma\,dt\left(1 - \dfrac{v u_x}{c^2}\right) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

6)

حال سرعت u'_x را به سادگی به شکل زیر محاسبه می‌کنیم.

$$(3)\qquad u'_x = \frac{dx'}{dt'} \underset{\uparrow}{=} \frac{\cancel{\gamma}(dx - v\,dt)}{\cancel{\gamma}\,dt\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} = \frac{dx/dt - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

با استفاده از رابطه 2

$$(4)\qquad \boxed{u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}}$$

حال اگر رابطه بالا در حد $c \to \infty$ یا $v/c \ll 1$ به تبدیل گالیله بر می‌گردد. مهم است که تبدیل سرعت در جهت y را نیز محاسبه کنیم.

$$(5)\qquad u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\,dt\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} = \frac{dy/dt}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

$$(6)\qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

و به طور مشابه

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

جالب است که دقت کنید به دلیل اتساع زمان و کار کردن متفاوت ساعت‌ها، تحدید سرعت در راستای y و z که حرکت نسبی در آن جهت نیست، متفاوت از تبدیلات گالیله است.

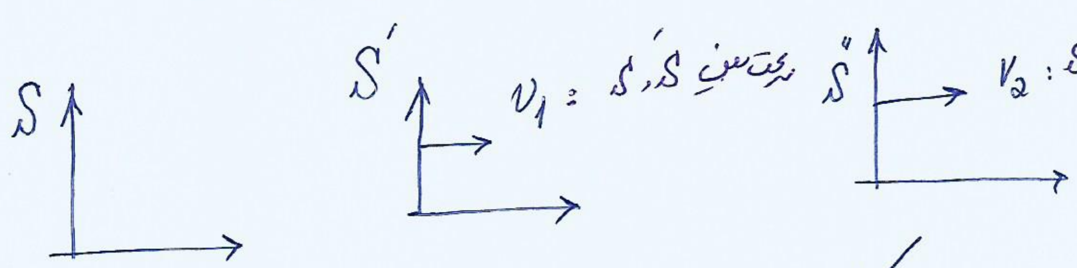
البته در حد $v/c \ll 1$ به تبدیلات گالیله $u'_y = u_y$ ، $u'_z = u_z$ بر می‌گردیم.

برای بدست آوردن سرعت ها، از دید ناظر S برای متحرک در دستگاه S' کافی است که پریم ها را تغییر دهیم و $v \leftrightarrow (-v)$ به دست آوریم.

$$(7) \qquad u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} \qquad u_y = \frac{u_y'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right)} \qquad u_z = \frac{u_z'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right)}$$

توجه داشته باشید که روابط تبدیل برای حرکت نحو دلخواه نیز می توان استفاده کرد.

در ادامه می خواهیم نشان دهیم که ویژگی های گروه برای تبدیل لورنتس برقرار است. فرض کنید سه دستگاه مختصات S، S'، S'' وجود داشته باشد، به طوری که



روابط ساده زیر را دنبال کنید.

$$(8) \qquad x' = \gamma(v_1)(x - v_1 t) \qquad t' = \gamma(v_1)(t - v_1 x)$$

$$x'' = \gamma(v_2)(x' - v_2 t')$$

حال در روابط (8) به جای x'، t' از روابط مربوط جایگذاری می کنیم

$$(9) \qquad x'' = \gamma(v_2)\left(\gamma(v_1)(x - v_1 t) - v_2\gamma(v_1)(t - v_1 x)\right)$$

(10)

$$x'' = \gamma(v_1)\gamma(v_2)\left[x(1+v_1v_2) - t(v_1+v_2)\right]$$

$$= \underbrace{\gamma(v_1)\gamma(v_2)(1+v_1v_2)}_{A}\left[x - t\left(\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}\right)\right]$$

رابطه (10) نوید بخش است به نظر می‌رسد، سرعت $V = \dfrac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}$ سرعت جمع

تحت تبدیلات لورنتس است. کافی است ترم A را

کمی بیشتر واکاوی کنیم.

(11)

$$A = \gamma(v_1)\gamma(v_2)(1+v_1v_2) = \frac{1}{(1-v_1^2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(1-v_2^2)^{1/2}}(1+v_1v_2)$$

$$= \frac{\left[(1+v_1v_2)^2\right]^{1/2}}{(1+v_1^2v_2^2-v_1^2-v_2^2)} = \frac{1}{\left[1-\left(\frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \gamma(v) \qquad v = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}$$

نتیجه

(12)

$$x'' = \gamma(v)(x - vt)$$

در کل حالت این که خاصیت گروه بودن با حاصل گروه سرعت ادامه می‌شود. سرعت نیز از قانون

جمع لورنتس تبعیت می‌کند.

برای درک بهتر خاصیت گروه بودن می‌توان از تعاریف زیر استفاده کرد. با ضرب c در روابط تبدیل لورنتس زمان یک زوج روابط متقارن خواهیم داشت.

$$(13) \quad x' = \gamma(x - vt) \to x' = \gamma\left(x - \frac{v}{c}(ct)\right)$$

$$(14) \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \to ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right)$$

در روابط بالا تقارن بین (x, ct) وجود دارد. روابط (13), (14) را با هم جمع و کم می‌کنیم.

$$(15) \quad ct' + x' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x + x - \frac{v}{c}(ct)\right)$$

$$= \gamma\left(ct\left(1 - \frac{v}{c}\right) + x\left(1 - \frac{v}{c}\right)\right)$$

$$= \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)(ct + x)$$

کمیت $\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right) = e^{-\phi}$ تعریف می‌کنیم. ϕ فقط تابعی از سرعت v است.

در نتیجه

$$(16) \quad ct' + x' = e^{-\phi}(ct + x)$$

حال به تفاضل روابط (14), (13) می‌پردازیم

$$(17) \quad ct' - x' = \gamma\left(ct - x - \frac{v}{c}x + \frac{v}{c}(ct)\right)$$

$$= \gamma\left((ct - x) + \frac{v}{c}(ct - x)\right)$$

$$= \gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right)(ct - x)$$

حال کمیت $e^{\phi} = \gamma(1+v/c)$ تعریف می‌کنیم.

$$ct' - x' = e^{\phi}(ct - x) \qquad (18)$$

جالب است رابطه فوق را مجددا بررسی می‌کنیم.

$$e^{\phi}e^{-\phi} = 1 = \gamma(1+v/c)\,\gamma(1-v/c)$$
$$= \gamma^2(1 - v^2/c^2) = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \cdot 1 - v^2/c^2 = 1$$

ϕ را کمیت جانشین v در پارامتر کانونی - پارامتر هذلولوی گون، "hyperbolic parameter"
و یا rapidity می‌نامیم. در درس نامه آینده بیشتر در مورد این تبدیل صحبت خواهیم کرد.

* منابع برای مطالعه درباره تابش زمینه کیهانی:

* The Cosmic Microwave background Advanced Textbook by Ruth Durrer 2008

* http://background.uchicago.edu/~whu
وبگاه رسمی Wayne-Hu با تعداد قابل توجهی تقریرات درباره CMB

* arXiv: 1807.06209
مقاله پلانک

پایان درس نامه