1/

# Special Relativity — نسبیت خاص

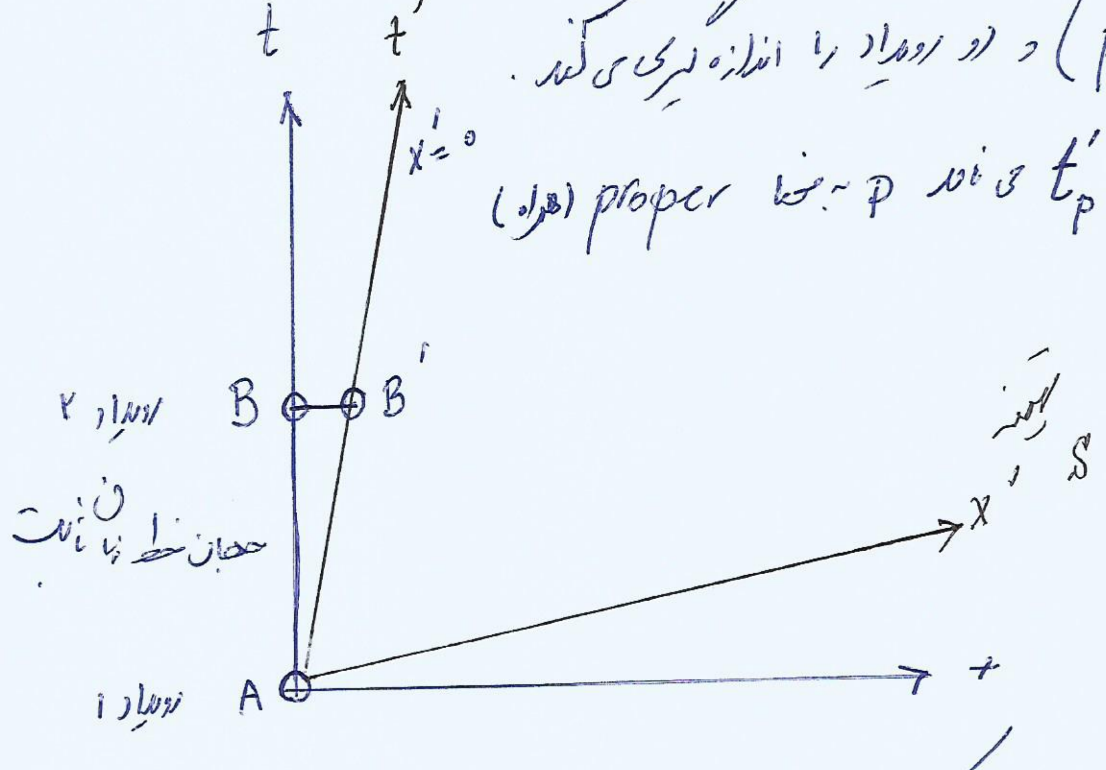
Fall 2020 — پاییز ۱۳۹۹

lecture Note 6 — جلسه ۶

## اتساع زمان

فرض کنید تهمینه به عنوان ناظر متحرک ساعت خود را به همراه دارد (زمان همراه - proper-time) دو رویداد را اندازه‌گیری می‌کند.

تهمینه این زمان را $t'_p$ می‌نامد p به معنا proper (همراه)




حال رودابه به عنوان ناظر ساکن می‌خواهد $B'$ را با مختصه خودش اندازه‌گیری کند.

$$t=\gamma\,(t'+vx')$$

مختصه $B'$، $x'=0$، $t'=t'_p$ است.

$$t = \gamma t'_p$$

در نتیجه زمانی که ناظر ساکن برای ساعت‌های تحت [illegible] اندازه‌گیری می‌کند بزرگتر است.
از آن جایی که نقطه شروع به هم منطبق است.

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p$$

زمان همراه

حال از دید ناظر $S'$، رویدادهایی که در $S$ می‌گذرد کندتر است (شبیه پارادوکس دوقلو)
که در آینده بیشتر بحث خواهیم کرد.

بحث‌های مربوط به انقباض طول و اتساع زمان را بررسی آن‌ها، با استفاده از
نمودارهای فضا-زمان. به یاد آورید که فواصل همانند فضای اقلیدسی نیست
برای این که آن را بررسی کنیم. بگذارید که برابری طول فضا-زمان را با رابطه
فیثاغورس بررسی کنیم.

$$x'^2 + t'^2 = \gamma^2 (x - vt)^2 + \gamma^2 (t - vx)^2$$

$$= \gamma^2 (x^2 + v^2 t^2 - 2xvt + t^2 + v^2 x^2 - 2vxt)$$

$$= \gamma^2 (x^2 + t^2) + \gamma^2 (v^2 (t^2 + x^2) - 4vxt)$$

3

به صورت واضح این رابطه در دو دستگاه $S$ و $S'$ برابر نیستند. با کمی تحقیق و با کاربری رابطه فوق، بگذارید، ارتباط $t'^2 - x'^2$ را بررسی کنیم

$$t'^2 - x'^2 = \gamma^2 (t - vx)^2 - \gamma^2 (x - vt)$$

$$= \gamma^2 (t^2 + v^2 x^2 - \cancel{2tvx} - x^2 - v^2 t^2 + \cancel{2xvt})$$

$$= \gamma^2 \left[ (t^2 - x^2) - v^2 (t^2 - x^2) \right]$$

$$= \gamma^2 (t^2 - x^2)(1 - v^2) = t^2 - x^2$$

عالی! به نظر می‌رسد که این کمیت ناوردا است. به طور واضح این رابطه برای اختلاف دو رویداد نیز صحیح است.

$$\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

همچنین برای دیفرانسیل

$$dt'^2 - dx'^2 = dt^2 - dx^2$$

این خود تقسیم به ما کمک می‌کند که کمیت ناوردای جدیدی را در فیزیک به نام
طول فضا-زمانی بیابیم. این ناوردایی تحت تبدیلات لورنتس است به این معنا که
ناظرهای مختلف IF که با تبدیلات لورنتس به یکدیگر مرتبط‌اند، کمیت زیر را ناوردا اندازه‌گیری
می‌کنند.

$$\Delta S^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

توجه کنید که در رابطه فوق، سرعت نور را برابر واحد در نظر گرفته‌ایم که اگر آن را
بازنویسی کنیم، رابطه به صورت $\Delta S^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ خواهد بود.

همچنین توجه کنید که انتخاب علامت (+) برای زمان و (-) برای مولفه‌های فضایی
قراردادی است که به آن نشانگان (+,-,-,-) می‌گویند.

می‌توانیم نشانگان را (-,+,+,+) نیز انتخاب کنیم. در ادامه این درس گاهی
ممکن است برای مقاصد آموزشی این تغییر را داشته باشیم.

حال برگردیم به مفهوم زمان همراه Eigenzeit (طول فضا-زمان).

همان طور که اشاره شد، زمان همراه زمانی است که توسط ناظری که همراه خود
ساعتی را دارد اندازه‌گیری می‌شود. به معنای دیگر مختصه ساعت همواره ثابت می‌ماند.

در این صورت خواهیم داشت.

$$\Delta S^2 = \Delta t^2 - \underbrace{\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}_{=0} \rightarrow \Delta S = \Delta t_p = \Delta\tau$$

ساعت همراه ناظر

نماد زمان همراه

به بیان دیگر زمان همراه، چون با طول فضا - زمان برابر است، این کمیت را همه ناظرها یکسان اندازه‌گیری می‌کنند، ولی تیک‌تاک آن‌ها به عنوان ساعت متفاوت خواهد بود. به رابطه زیر توجه کنید.

$$\Delta S^2 = \Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta t^2\left[1 - \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2\right]$$

زمان همراه

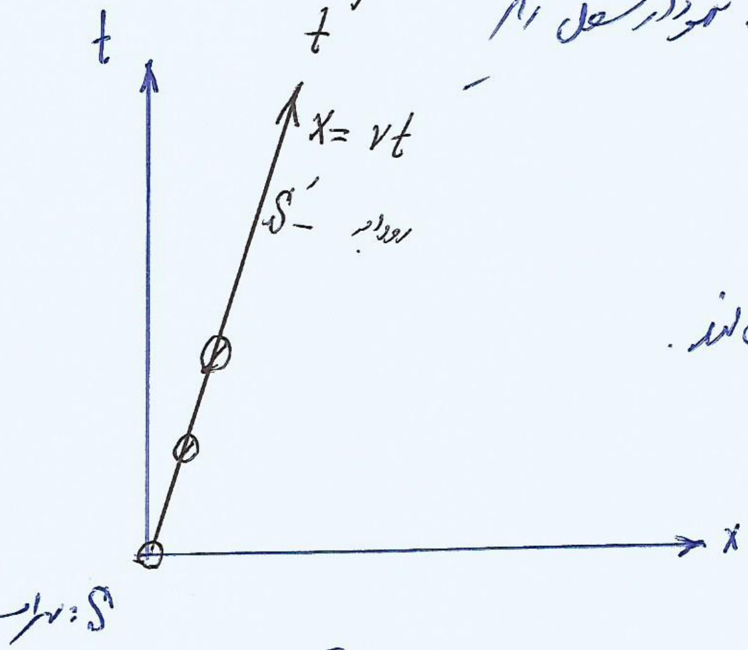
in standard config.

حال اگر $\Delta x$ و $\Delta t$، بازه‌ها در فضا - زمان حرکت یک ناظر باشد، معادل سرعت ناظر $V = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ خواهد بود لذا داریم

$$\Delta\tau = \Delta t\left[1 - v^2\right]^{1/2} \rightarrow \Delta t = \gamma\,\Delta\tau$$

که رابطه فوق، همان رابطه‌ای است، که از اتساع زمان از تبدیل لورنتس به دست آورده بودیم. بزرگتر بودن $\Delta t$ نسبت به $\Delta\tau$ به معنای این است که فاصله زمانی دو رویداد از دید ناظر غیرهمراه بزرگتر، و در نتیجه اگر فرآیندی مدنظر باشد، فرآیند کندتر است.

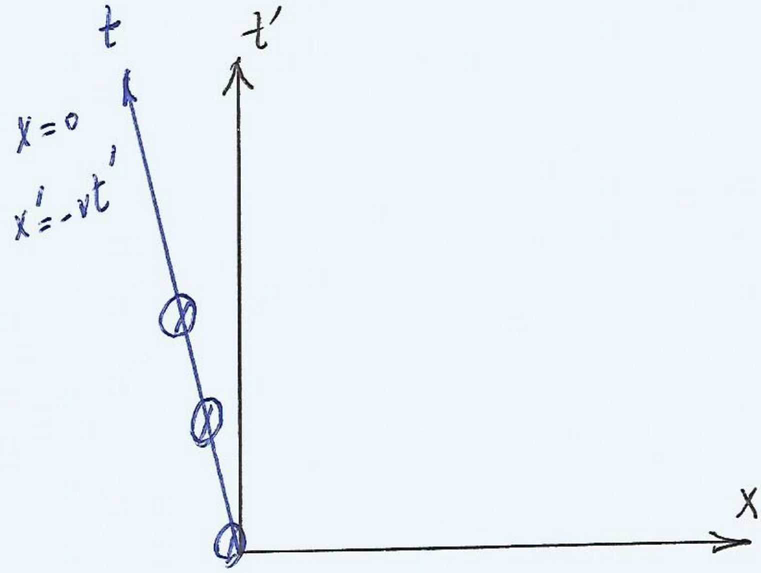
کند کار کردن، ساعت ها بسیار حیرت انگیز است و باعث کنجکاوی و ارائه گزاره های متناقض نما (paradoxical) می شود. مثال معروف پارادوکس دوقلوها است. فرض کنید سهراب و روداب دوقلو باشند. هر دو تصمیم می گیرند که ساعت ها را تنظیم و در پیکربندی استاندارد، روداب سوار بر یک سفینه فضایی با سرعت V از سهراب دور شود. نمودار شکل زیر




بر اساس مفهوم اتساع زمان، متوجه می شویم که ساعت های روداب کُند کار می کند. از آن جایی که این ساعت ها می توانند ساعت زیستی (biological clock) روداب باشد. بدین معنا است که سهراب، روداب را جوان تر اندازه گیری می کند!

باید خاطر نشان کرد که منظور از اندازه گیری زمان، استفاده از نور است. بدین معنا که سهراب و روداب قرار گذاشته اند، که سر هر بازه زمانی مشخص، یک سیگنال، به طور مثال هر ساعت روداب پالسی را برای سهراب بفرستد. اتساع زمان بدین معنا است که سهراب پالس ها را در بازه زمانی بزرگتر از یک ساعت اندازه گیری می کند.

به طور مشابه، رودابه نیز همان مشاهده را دارد: رودابه ساعت‌های سهراب را کندتر اندازه‌گیری می‌کند. اگر از دید رودابه نمودار فضا-زمان را رسم کنیم خواهیم داشت



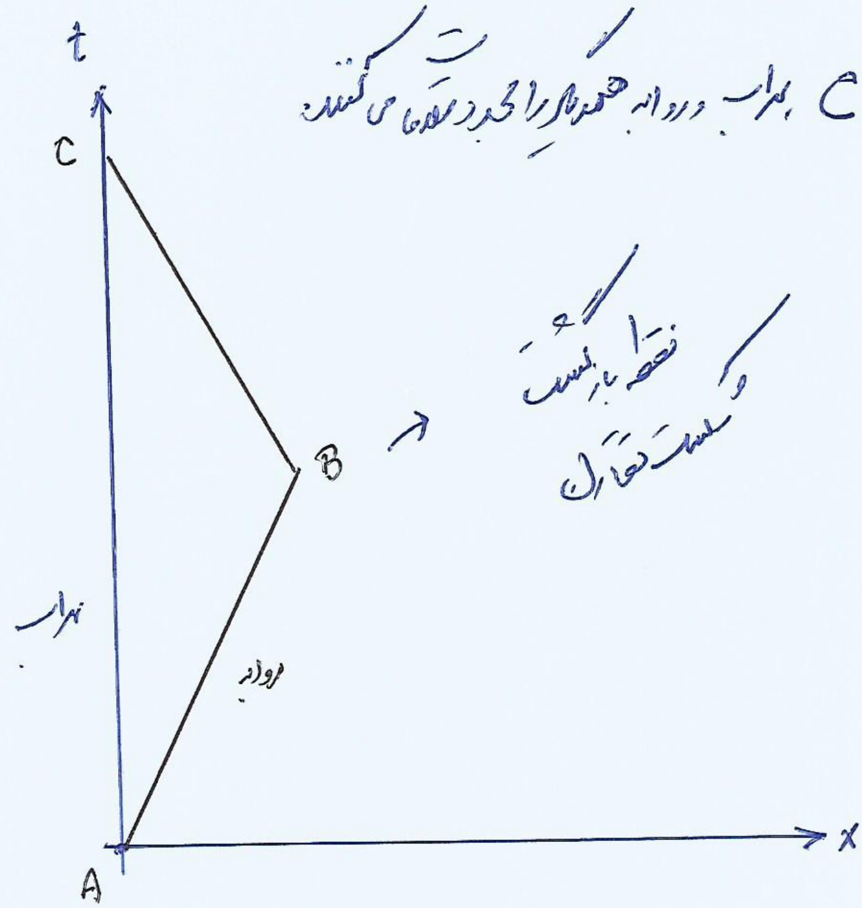

این برداشت، اگر چه متفاوت، ولی متقارن است! سهراب، رودابه را جوان‌تر اندازه‌گیری می‌کند و رودابه سهراب را جوان‌تر! تا این جا مسئله‌ای نیست چون در مورد اندازه‌گیری دو رویداد متفاوت در فضا-زمان صحبت می‌کنیم

حال اجازه دهید پارادوکس را مطرح کنیم. اگر رودابه تصمیم بگیرد بعد از مدتی به زمین برگردد و در کنار برادر دوقلوی خود قرار بگیرد کدام جوان‌تر خواهد بود.

توجه کنید که در ورژن اصلی این پارادوکس دوقلوها همسان دقیقاً شبیه یکدیگر هستند! که در داستان ما نبودن اوضاع بیشتر مشخص شود.

نمودار فضا - زمان این رویداد می‌تواند به صورت زیر باشد.

که در نقطه C سهراب و رودابه همدیگر را مجدداً ملاقات می‌کنند.




سؤال این است که کدام یک جوان می‌ماند. نکته اول، این که رودابه برای بازگشت به زمین و ملاقات با سهراب باید تقارن مسئله را بشکند، از این رو تقارن IFها تناقض وجود ندارد. نکته دوم و مهم بعدی این است که رودابه برای برگشت باید حتماً جهت موتور خود را از بین ببرد و شتاب بگیرد. در نتیجه نقطه B که نقطه شکست تقارن است، نقطه‌ای است که رودابه شتاب گرفته است.

شتاب، مسئله را از دستگاه‌های تحت تبدیلات لورنتس به یک فضای منحنی خارج می‌کند.

آیا می‌توانیم در چارچوب نسبیت خاص مسئله را حل کنیم؟

جواب آری است. حتی حل مسئله می‌تواند در طول فضا زمان باشد.

$$\underbrace{\Delta\tau^2}_{\text{زمان همراه رونده}} = \underbrace{\Delta t^2}_{\text{مختصاتی که ساعت اندازه‌گیری می‌کند.}} - \Delta x^2 \to \Delta\tau = \Delta t\left[1-\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2(t)\right]^{1/2}$$

رابطه فوق همانند رابطه بین IF است با این تفاوت که $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ اگر نماینده حرکت رونده باشد تابعی است از زمان. در حالی که در ارتباط دستگاه‌های لخت $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ثابت برابر $v$، تبدیلات لورنتس بود.

در هر حال بستگی به زمان داشتن $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ به معنای شتاب است. البته در هر لحظه خاص می‌توانید ارتباط بین $\Delta t$ , $\Delta\tau$ را با نسبیت خاصی بسنجید نسبیت خاص بدانید و در لحظه بعد این نسبت را تغییر دهید. این جمله ریشه عمیق در مفهوم «موضعیت» "locality" نسبیت عام دارد که در آینده به آن خواهیم پرداخت.

برای حل پارادوکس دوقلوها، برمی‌گردیم به رابطه زمان همراه.

$$\Delta\tau = \Delta t \left[ 1 - v^2(t) \right]^{1/2}$$

حال دو طرف رابطه را از A تا C انتگرال می‌گیریم.

$$\tau_{AC} = \int_{t_A}^{t_C} dt \left[ 1 - V^2(t) \right]^{1/2} < t_{AC}$$

از آن جایی که ترم داخل براکت کوچکتر از یک است در بازه‌های $\Delta t$ ضرب و جمع می‌شود

$\tau$ حتماً از $t_{AC} = t_C - t_A$ کوچکتر است!

این بدین معنا است که برای رودابه، زمان کندتر گذشته، و او جوان‌تر از

برادر دوقلوی خود سهراب خواهد بود!

« پایان درس نامه »