Special Relativity

Fall 2020

lecture Note 5

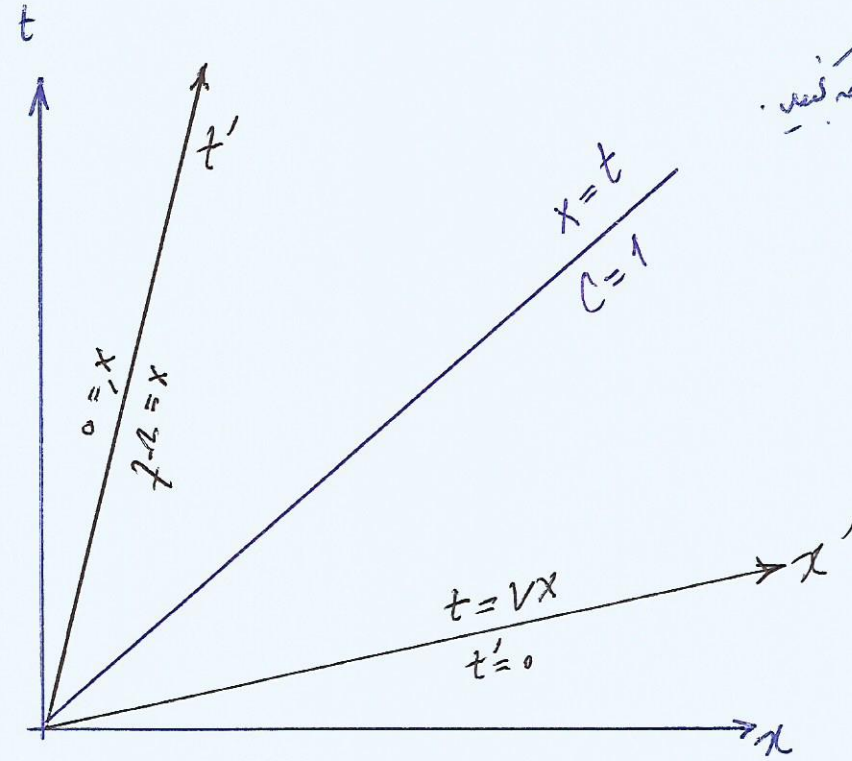
نسبیت خاص

پاییز ۱۳۹۹

درسنامه ۵

جلسه پیش با این سوال درسنامه را تمام کردیم که تبدیلات مناسب بین دو دستگاه S و S' چیست؟ تبدیلی که به تراز است، سرعت نور را در دستگاه های لخت ثابت نگاه دارد.

مجدد به تصویر زیر توجه کنید.



گفته شد حالا این که

$$\begin{cases} x'=0\,, & x=vt \\ t'=0\,, & t=vx \end{cases}$$

در نتیجه تبدیل باید ترکیب

$$\begin{cases} x-vt \\ t-vx \end{cases}$$

وجود داشته باشد. پیشنهاد به صورت زیر است.

$$x' = (x-vt)\, f(|v|)$$

$$t' = (t-vx)\, g(|v|)$$

f، g توابع دلخواه هستند، که فقط تابعی از اندازه سرعت نسبی بین دو دستگاه S و S' است.

2,

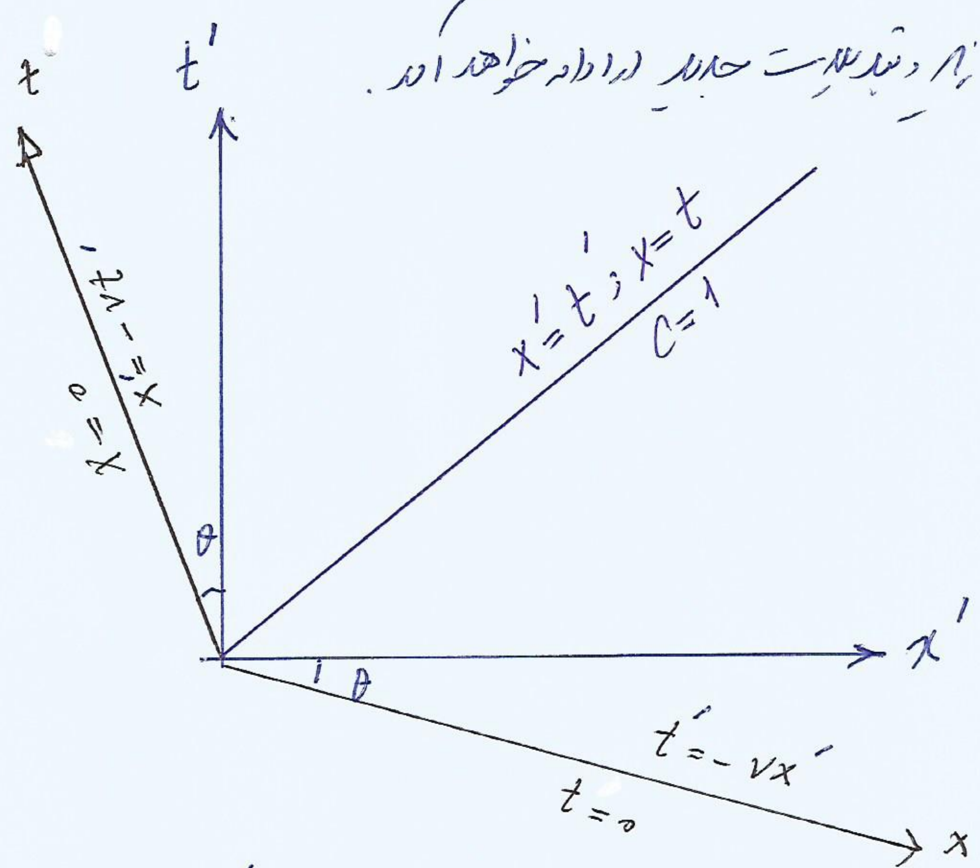
حال اگر بخواهیم که سرعت نور در دو دستگاه c یکسان باشد باید

$x=t$ ، $x'=t'$ باشد. این نتیجه می‌دهد که $f(v)=g(v)$

از طرف دیگر فرض کنید که ناظر S' دستگاه مختصات را رسم کند. بدین معنا که

دستگاه S با سرعت v از ناظر S' دور می‌شود. در نتیجه نمودار فضا-زمان

به صورت زیر در تبدیلات جدید در خواهد آمد.



$$(\mathrm{I})\begin{cases} x = (x' + vt')\, f(v) \\ t = (t' + vx')\, f(v) \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} x' = (x - vt)\, f(v) \\ t' = (t - vx)\, f(v) \end{cases}$$

توجه کنید که با جابجایی $x \leftrightarrow x'$ ، $t \leftrightarrow t'$ روابط جدید به دست آمده، علامت سرعت تغییر (منفی)

شده است. از این پس نیز علامت بردار را حذف کرده‌ایم.

هدف آن است که $f(v)$ را به دست بیاوریم چون ساده‌ای پیش رو داریم (I), (II) را استفاده کرده خواهیم داشت

$$x = (x' + vt')\, f(v) = \left[(x - vt) f^2(v) + v(t - vx) f^2(v) \right]$$

$$\cancel{x} = \cancel{x}\left[f^2 - v^2 f^2 \right] + t\underbrace{\left[-v f^2 + v f^2 \right]}_{0}$$

$$1 = f^2 \left[1 - v^2 \right] \to f = \frac{1}{(1 - v^2)^{1/2}}$$

علامت مثبت را انتخاب کردیم چون به ازای $x' = x$ می‌خواهیم داشته باشیم $v = 0$

f همان فاکتور معروف لورنتس است

$$f = \gamma = \frac{1}{(1 - v^2)^{1/2}}$$

سپس بعد $c = 1$ در نظر گرفته بودیم اگر این نسبت را برگردانیم تا بعد تبدیلات درست باشد خواهیم داشت

$$x' = \gamma(v)\,(x - vt) \qquad y' = y$$

$$t' = \gamma(v)\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \qquad z' = z$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

این تبدیلات معروف لورنتس اند که H. Lorentz آن را بدست آورده بود

انشتین این تبدیلات را از بیان دو اصل موضوع خود بازیافت.

اگر نسبت V/c را کوچک در نظر بگیریم، تبدیلات گالیله باز خواهیم یافت

$V/c \ll 1 \Rightarrow$ Lorentz Transformation → Galilean Transformation

این می تواند نمونه ای از اصل هم خوانی Correspondence Principle باشد.

توجه کنید که این اصل توسط نیلز بور در سال 1920 مطرح شد برای هم خوانی مکانیک کوانتوم و مکانیک کلاسیک در حد ذرات بزرگ.

اکنون این اصل را در بیان کلی می توان چنین بیان کرد که تئوری جدیدتر در حد مناسب باید بتواند نظریه قدیم را بازیابد.

تبدیلات لورنتس، زیبا و حیرت انگیزند. آن ها اثرات عمیقی بر روی سینماتیک و دینامیک دارند. در ادامه دو اثر ساده و مهم انقباض طول و اتساع زمان را بحث خواهیم کرد

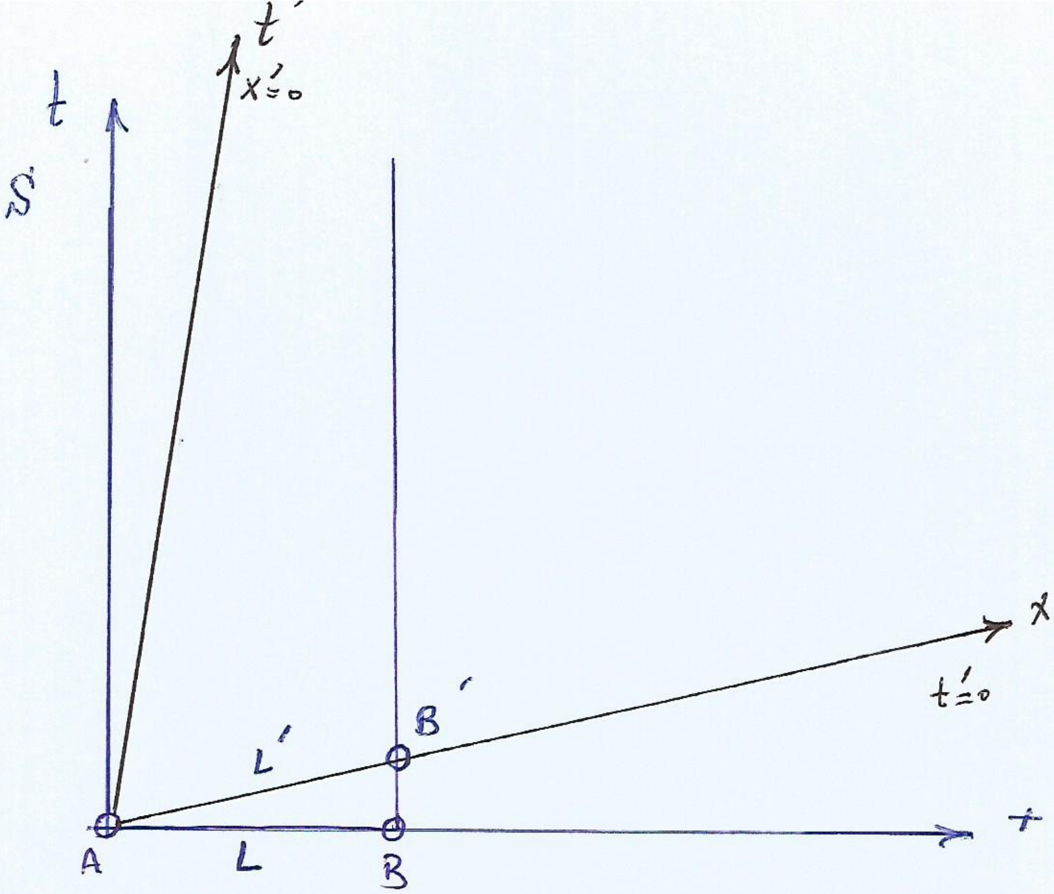
یکی از حیرت‌انگیزترین نتایج تبدیلات لورنتس، انقباض طول و اتساع زمان است.

□ انقباض طول

فرض کنید ناظری در دستگاه S (ویژه) که خط‌کشی به طول L داشته باشد.

توجه داشته باشید که مفهوم اندازه‌گیری طول، مفهوم دقیقی است. به این معنا که ابتدا و انتهای خط‌کش را باید هم‌زمان اندازه‌گیری کنیم. به شکل زیر توجه کنید.

A و B ابتدا و انتهای خط‌کش است و این دو نقطه هم‌زمان اندازه‌گیری شده است. به معنای دیگر A و B بر روی جهان‌خط ثابت حرکت می‌کنند. حال فرض کنید ناظر S' که ([illegible]) با سرعت v نسبت به S در حال حرکت است می‌خواهد طول این خط‌کش را اندازه‌گیری کند. از این رو دستگاه مختصات خودش را به صورت زیر برقرار می‌کند.



حال برای این که طول خط‌کش را ناظر S اندازه بگیرد باید طول خط کش را همزمان از دید خودش اندازه‌گیری کند. از این رو AB' که بر روی خط $t'=0$ است، طول خط‌کش را به دست می‌دهد. از این رو باید مختصه B' را محاسبه کنیم. از تبدیل لورنتس داریم.

(1) $x' = \gamma(x - vt)$

(2) $t' = \gamma(t - vx)$ برای نقطه B' , $t'=0$

در نتیجه $t = vx$ را در رابطه (1) جایگذاری می‌کنیم.

$$x' = \gamma(x - v(vx)) = \gamma x(1-v^2) = (1-v^2)^{\frac{1}{2}} x$$

از آنجایی که A برای دو ناظر یکسان است، خواهیم داشت

$$X' = (1-V^2)^{1/2} X$$

$$L' = (1-V^2)^{1/2} L$$

طول در دستگاه S

طول در دستگاه S'

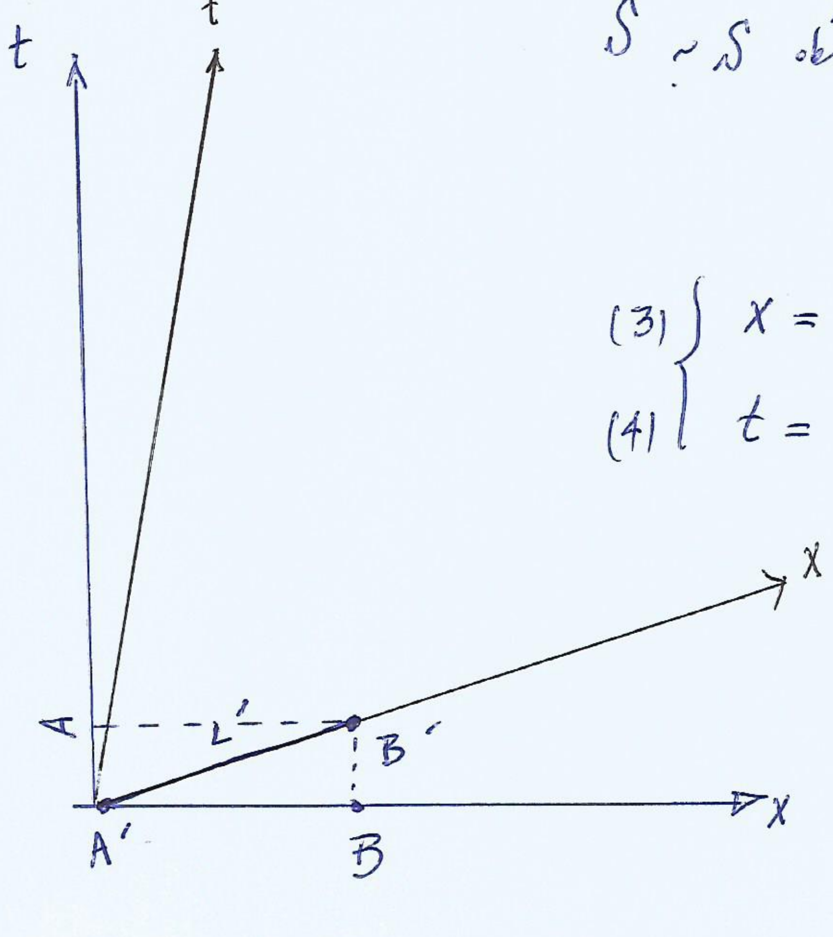
S' طول خط‌کش را به اندازه $(1-V^2)^{1/2}$ کوتاه‌تر می‌بیند.

حال فرض کنید که S' خط‌کشی را همراه خود برداشته است، طول آن را L' اندازه‌گیری می‌کند. سؤال این است که ناظر S، این طول را چگونه می‌بیند؟

روابط تبدیل لورنتس از دستگاه S' به S

به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') & (3) \\ t = \gamma(t' + vx') & (4) \end{cases}$$



برای اندازه گیری طول در دستگاه S. این محاسبات باید در $t=0$ انجام شود

$$t=0 \rightarrow t'=-vx'$$

با جایگذاری در رابطه (3) داریم:

$$x=\gamma(x'+v(-vx'))$$

$$L=\gamma(L'(1-v^2))=(1-v^2)^{1/2}L'$$

حیرت انگیز است! ناظر S نیز طول خط کش را کوچکتر اندازه گیری می کند.

باید توجه داشته باشید که اندازه گیری طول یک خط کش از دید دو ناظر دو رویداد متفاوت در فضا و زمان است. از این رو هیچ تناقضی در این اندازه گیری وجود ندارد.

نکته: طولی که ناظر از خط کشی که همراه خودش است (نسبت به خودش ساکن است) را اندازه گیری می کند، طول همراه می گویند. در نتیجه طول همراه، بزرگترین طول است و بقیه ناظرها آن را کوتاهتر اندازه گیری می کنند.

پیش از آن که داستان را ارائه دهیم، باید توجه نمایید که روابط زیر نیز برای اختلاف مختصات طولی و زمانی هم برقرار است. فرض کنید دو رویداد 1 و 2 در دستگاه S و S' به ترتیب مختصات (x_1, t_1) و (x_2, t_2) تحت تبدیلات لورنتس (x_1', t_1') و (x_2', t_2') به گونه زیر به یکدیگر مرتبطند.

$$\begin{cases} x_1' = \gamma(x_1 - v t_1) \\ x_2' = \gamma(x_2 - v t_2) \end{cases}$$

تفاضل $$x_2' - x_1' = \gamma\left(x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)\right)$$

با تعریف $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x' = x_2' - x_1'$ خواهیم داشت.

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t)$$

به طور مشابه

$$\begin{cases} t_2' = \gamma(t_2 - v x_2) \\ t_1' = \gamma(t_1 - v x_1) \end{cases}$$

تفاضل دو معادله را محاسبه می‌کنیم.

$$t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1 - v(x_2 - x_1))$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x)$$

در نتیجه تبدیلات لورنتس را می‌توان برای اختلاف طول/زمان نوشت. همچنین می‌توانیم تبدیلات لورنتس را به شکل دیفرانسیلی نوشت.

$$\begin{cases} \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - v\,dt) \\ dt' = \gamma(dt - v\,dx) \end{cases}$$

شکل دیفرانسیلی در بحث سرعت این روابط نسبیت ما در دو دستگاه IF با استفاده تبدیلات لورنتس بسیار مفید است.

در درس‌نامه آینده به اتساع زمان خواهیم پرداخت.