Special Relativity

Fall 2020

lecture Note 2

نسبیت خاص

پاییز ۱۳۹۹

درس نامه ۲

در تبدیلات گالیله، در صورتی که پیکربندی استاندارد نباشد به این معنا که S و S' بر هم منطبق نباشند

می‌توان با استفاده از دوران rotation، انتقال در فضا و زمان translation

(spatial & temporal) دو دستگاه را بر روی هم منطبق کرد.

تعداد درجات آزادی در تبدیل گالیله به صورت زیر است

(1) $$\underbrace{1}_{\text{انتقال در زمان}} + \underbrace{3}_{\text{انتقال در مختصات}} + \underbrace{3}_{\text{دوران}} + \underbrace{3}_{\text{۳ مولفه سرعت } \vec{v}} = 10$$

تبدیلات گالیله به همراه انتقال در فضا-زمان را با استفاده از مفهوم گروه نیز می‌توان توضیح داد. به این مجموعه general Galilean Transformation می‌گویند.

انتقال در فضا-زمان را با نگاشت زیر نشان می‌دهیم.

(2) $$(t, \vec{x}) \longmapsto (t+s, \vec{x}+\vec{a})$$

که $s \in R$ ، $\vec{a} \in R^3$ کمیت‌های ثابتی هستند

• دوران: دوران در فضای ۳-بعدی اقلیدسی به شکل گروه O(3) نمایش داده می‌شود که O نماینده متعامد بودن orthogonal group است

در نتیجه نگاشت دوران به شکل زیر است.

$$(t, \vec{x}) \longmapsto (t, \tilde{R}\vec{x}) \tag{3}$$

که $\tilde{R}$ نماینده گروه دوران است $R \in O(3)$ ثابت است، $\tilde{R}\vec{x} \in R^3$

• سومین تبدیل مربوط به جنبه boost است که با نگاشت زیر مشخص است

$$(t, \vec{x}) \mapsto (t, \vec{x} + \vec{v}t) \tag{4}$$

که $v \in \mathbb{R}^3$ بردار ثابت است که نماینده سرعتی است که دستگاه S' نسبت به S حرکت می‌کند

- اصل نسبیت گالیله‌ای: Principle of Galilean Relativity:

قوانین نیوتن: تحت تبدیل گالیله‌ای ناوردا invariant است، و دو دستگاه تحت یا تبدیل گالیله به یکدیگر وصل می‌شوند.

این به معنا تقارن در قوانین فیزیکی است. symmetry of physical law!

که گروه تقارنی را گروه گالیله Galilei group Gal(3) می‌نامند.

در نتیجه هر عضو گروه گالیله شامل $s \in R$ به بیانگر انتقال زمانی است.

بردار $\vec{a} \in R^3$ بردار انتقال فضایی، بردار $\vec{v} \in R^3$ سرعت برای حرکت ثابت، و در نهایت

$\tilde{R} \in O(3)$ نمایش دوران. در نتیجه با روش خوشتاری استفاده کرد.

J. M. Lévy-Leblond, Journal of mathematical Physics, 4 (1963), pp. 776-788.

$$(5)\quad Gal(3) \equiv \{(s, \vec{a}, \vec{v}, \tilde{R}) : s \in R;\ a, v \in R^3;\ \tilde{R} \in O(3)\}$$

اگر اعضای گروه را $G = (s, \vec{a}, \vec{v}, \tilde{R})$ تعریف کنیم و $(t, \vec{x})$ یک رویداد

در فضا-زمان باشد. رابطه زیر برقرار است.

$$(6)\quad G(t, \vec{x}) \equiv (t + s,\ \tilde{R}\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a})$$

Q1: پرسش ۱:

با توجه به تعریف گروه، نشان دهید که $G'G$ بر روی یک رویداد معادل یک تبدیل گالیله‌ای

است. این عضو را بیابید. و درباره عضو واحد identity element

و عضو معکوس inverse بحث کنید.

A: برای تعریف گروه‌ها

۱- اصل بسته بودن Closure axiom

اگر a، b عضو گروه باشند تحت عمل "∘" آنگاه:

(7) $a \circ b \in G$

۲- اصل شرکت‌پذیری associativity axiom

(8) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

۳- وجود عنصر واحد identity element (I) تحت عمل "∘"

(9) $I \circ a = a \circ I = a$

۴- وجود عنصر معکوس به قسمی که (a^{-1})

(10) $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = 1\!\!1$

حال برای گروه گالیله $G = (s, \vec{a}, \vec{v}, \tilde{R})$ و دیگری داریم $G' = (s', \vec{a}', \vec{v}', \tilde{R}')$

(11)

$$G' G(t, x) = G'(t+s, \tilde{R}\vec{x} + \vec{a} + \vec{v}\, t)$$

$$= \left((t+s)+s', \tilde{R}'(\tilde{R}\vec{x} + \vec{v} t + \vec{a}) + \vec{a}' + \vec{v}'(t+s)\right)$$

$$= \left(t + (s+s'), \underline{\underline{\tilde{R}'\tilde{R}}}\, \vec{x} + \underline{\underline{(\tilde{R}' v + v')}}\, t + (\tilde{R}'\vec{a} + \vec{v}' s + a')\right)$$

درنتیجه

$$(s', a', v', \tilde{R}') \circ (s, \vec{a}, \vec{v}, \tilde{R})$$

$$= (\underbrace{s+s'}_{s''}, \underbrace{\vec{R}'\vec{a} + \vec{v}'s + \vec{a}'}_{\vec{a}''}, \underbrace{\tilde{R}'\vec{V} + \vec{v}'}_{\vec{V}''}, \underbrace{\tilde{R}'\tilde{R}}_{\vec{R}''})$$

$$= (s'', \vec{a}'', \vec{V}'', \tilde{R}'') \qquad (12)$$

که مجموعه بسته Gal(3) است.

عضو واحد identity-element برابر است با $(0, 0, 0, I)$

که $I \in O(3)$ دوران واحد identity rotation است.

و عضو معکوس برابر است با:

(13) $$(s, a, v, \tilde{R})^{-1} = (-s, R^{-1}(vs-a), -R^{-1}v, R^{-1})$$

است زیرا

(14)

$$(s, a, v, \tilde{R})^{-1}(s, a, v, R) = (s - s, R^{-1}a - R^{-1}vs$$

$$R^{-1}vs - R^{-1}a, R^{-1}v - R^{-1}v, R^{-1}R)$$

$$= (0, 0, 0, 1)$$

درنتیجه

$$(s, \vec{a}, \vec{v}, \tilde{R})^{-1} = (-s, R^{-1}(vs-a), -R^{-1}\vec{v}, R^{-1})$$

حال برگردیم به داستان مکانیک نیوتنی و قوانین حرکت.

اگر تبدیلات گالیله برقرار باشد و بخواهیم که قوانین نیوتن ناوردا باشند باید دو فرض را داشته باشیم. ۱) جرم کمیت ناوردا است ۲) نیرو کمیت ناوردا است.

توجه داشته باشید که جرم را از قانون سوم نیوتن به دست می‌آوریم.

$$(15) \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \rightarrow m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2$$

اگر m_1 را جرم واحد در نظر بگیریم. جرم یک پروتون

m_p

$$(16) \qquad m_p = 1.67 \times 10^{-27}\ Kg = 938.27\ MeV/c^2 \sim 1 GeV/c^2$$

جرم هر ذره برابر خواهد بود با

$$(17) \qquad m_2 = \left| \frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2} \right| \cdot 1 GeV$$

از طرف دیگر نیرو را تعریف می‌کنیم

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

که شتاب کمیت ناوردا در دستگاه‌های لخت است.

در نتیجه اصول یک کامل است که نسبیت نیوتنی (یا گالیله‌ای) داشته باشیم.

7/

Q2 پرسش ۲ : آیا تبدیلات گالیله که ناوردایی قوانین نیوتن را به همراه دارند با معادلات ماکسول سازگارند. با مثالی بسیار ساده، این موضوع را بررسی کنید.

معادلات ماکسول به شکل زیر تعریف می‌شوند

(M-1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

$\vec{E}$ ، $\vec{B}$ به ترتیب میدان الکتریکی و مغناطیسی است

(M-2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

ρ ، J چگالی بار و جریان است

(M-3) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

ϵ_0 و μ_0 ضرایب گذردهی الکتریکی و مغناطیسی

(M-4) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

مثال ساده‌ای را در نظر بگیرید که در دستگاه مختصات S، محیط بدون بار و جریان داریم

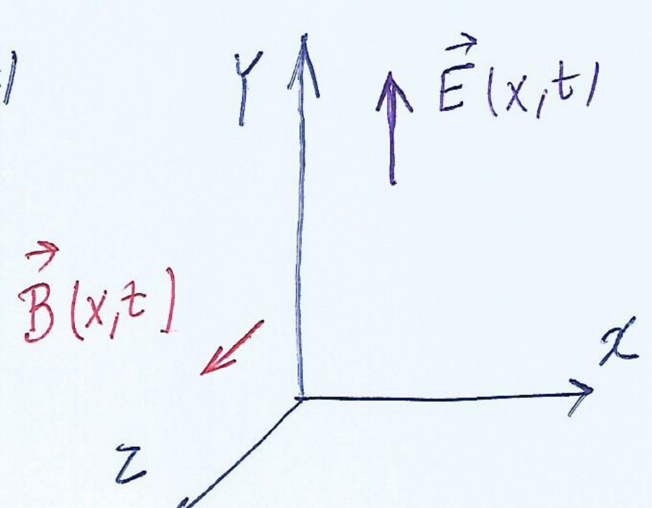
میدان الکتریکی در جهت $\vec{y}$ و میدان مغناطیسی در جهت $\vec{z}$ است.

میدان الکتریکی و مغناطیسی فقط تابعی از جهت $\vec{x}$ و زمان t است.

$\vec{E}(\vec{x}, t)$

$\vec{B}(\vec{x}, t)$

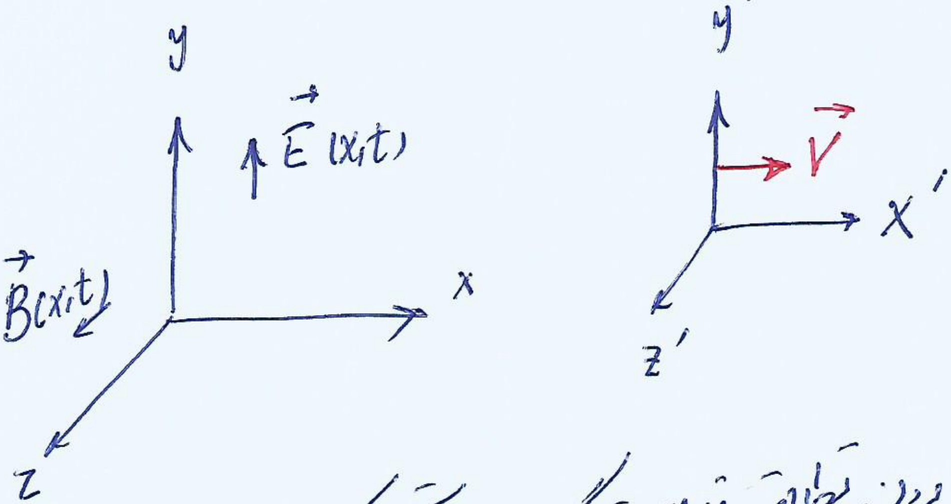
شکل روبرو را ملاحظه کنید.



دستگاه S

8,

حال فرض کنید که دستگاه لخت S' با سرعت $\vec{V}$ نسبت به دستگاه S در جهت x حرکت می‌کند.



حال برای چک کردن تطابق تبدیلات گالیله و معادله ماکسول از معادله (M-4) استفاده می‌کنیم

$$(18)\qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = +\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{B})_y}_{\text{در جهت } \hat{y}}$$

$$= \epsilon_{ylm}\,\partial_l\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{در جهت } z \text{ است}}}{B_m} = \epsilon_{yxz}\,\partial_x B_z = -\partial_x B_z$$

در نتیجه معادله ماکسول برای پیکربندی خودمان داریم:

$$(19)\qquad \partial_x B_z = -\frac{1}{c^2}\,\partial \vec{E}/\partial t$$

حال با استفاده از تبدیلات گالیله داریم

(G-T)
$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

$$(20)\qquad \frac{\partial}{\partial x} B = \frac{\partial B}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$(21)\qquad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial t}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = 0 \qquad (22a,b,c,d)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -V$$

در نتیجه خواهیم داشت.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{\partial B}{\partial x'} \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial E}{\partial t'} - V\frac{\partial E}{\partial x'} \end{aligned}\right. \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial x'} = -\frac{1}{c^2}\left\{\frac{\partial E}{\partial t'} - V\frac{\partial E}{\partial x'}\right\} \qquad (23)$$

نکته بسیار مهم. مختصه‌ها به دستگاه پریم دار رفته‌اند ولی میدان الکترومغناطیس هنوز در دستگاه S هستند. برای این تبدیل از ناوردایی نیرو در مکانیک نیوتنی کمک می‌گیریم. فرض کنید باری با سرعت $\vec{u}$ در جهت محور x در حال حرکت است. با بستگی نیرو دارای نیروی لورنتس نتیجه خواهد داد.

$$\vec{F} = q(\underset{\downarrow \atop \text{جهت } y}{\vec{E}} + \underset{\downarrow \atop \text{جهت } x}{\vec{u}} \times \vec{B} \rightarrow \text{جهت } z) \qquad (24)$$

$$(25) \quad F_y = q(E - uB) \underset{\uparrow}{=} F'_y = q(E' - u'B')$$

اصل ناوردایی نیرو

توجه داشته باشید که همانند جرم، فرض کرده‌ایم که q ناوردا است.

دوم این که سرعت بار را در دستگاه S و S' به ترتیب با u و u' نشان داده‌ایم.

با توجه به نسبیت سرعت‌ها

$$u' = u - V \qquad (26)$$

خواهیم داشت

$$q(E - uB) = q(E' - uB' + VB') \qquad (27)$$

با برابری ضرایب ثابت (مستقل از سرعت) و وابسته به سرعت خواهیم داشت

$$\begin{cases} E = E' + VB' & (28) \\ B = B' & (29) \end{cases}$$

روابط فوق قوانین تبدیل میدان‌ها با فرض ناوردایی بار و نیرو است. با جایگذاری روابط فوق در معادله (23) خواهیم داشت

$$\frac{\partial B}{\partial x'} = -\frac{1}{c^2}\left\{\frac{\partial E}{\partial t'} - V\frac{\partial E}{\partial x'}\right\} \qquad (30)$$

$$\rightarrow \frac{\partial B'}{\partial x'} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E'}{\partial t'} + \left\{+V\frac{\partial B'}{\partial t'} - V\frac{\partial E'}{\partial x'} - V^2\frac{\partial B'}{\partial x'}\right\}\left(-\frac{1}{c^2}\right)$$

ترم داخل پرانتز اضافی است.

نتیجه: معادلات ماکسول با تبدیلات گالیله سازگار نیست!!

« پایان »