دانشگاه صنعتی شریف
پاییز ۱۳۹۹

تمرین سری ششم نسبیت خاص - دکتر شانت باغرام

صبا اعتضاد رضوی — s_etezadrazavi@yahoo.com
زهرا کبیری — kabiri.zahra98@gmail.com
کوروش علامه — kuroshallame@gmail.com

Becoming a physicist brings with it the privilege of retaining your childhood curiosity throughout your adult life. There is no need to pretend you know more than you actually do، and you can admit mistakes if proven wrong by experience، just like a child who is seeking to learn about the world. Doing pure theory without worrying about experimental verification actually deprives one from the pleasure of learning something new about nature – Avi Loeb

موضوع این سری تمرین نظریه میدان کلاسیک است.

جواب تمرین ها را به آدرس TA.baghram.1@gmail.com ایمیل کنید. در صورتی که میخواهید تمرین را با تاخیر تحویل داده و از ۷ روز مجاز تاخیری خود استفاده کنید، حتما در بالای صفحه ی اول تمرین تعداد روز هایی که استفاده میکنید را واضح و خوانا بنویسید.

مهلت ارسال شنبه ۲۰ دی ساعت ۱۱:۵۹ شب

۱ معادله دیراک و الکترودینامیک نسبیتی

دراین سوال می خواهی مبه معادل هی دیراک و تئوری برهمکنش بین فوتون ها و الکترون ها، الکترودینامیک نسبیتی، بپردازیم.
در سراسر این سوال $c = 1$ است.
در طی درس با معادله ی کلاین گوردون به شکل زیر آشنا شدید که جواب آن یک میدان اسکالر است:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل مرتبه ی اول است و به این معناست که برای حل آن به دو شرط اولیه ی $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}$ نیاز داریم
حال آنکه در مکانیک کوانتومی ما تنها خود ϕ_0 را داریم و مقدار تابع موج در تمامی لحظات بعدی تنها با اثر دادن عملگر تحول بدست می آید.
درخواستمان برای داشتن یک معادله ی کوانتومی نسبیتی مرتبه ی اول انگیزه ی دیراک برای شروع کار خود بود. به بیانی دیراک به دنبال معادله ی مرتبه اولی به شکل زیر می گشت:

$$E = \overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\mathrm{p}} + \beta m$$

که در آن $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ است.

از طرفی همچنان معدله پایستگی انرژی نسبیتی را به شکل زیر داریم:

$$E^2 = |\mathrm{p}|^2 + m^2$$

الف) از معادله ی پایستگی انرژی و فورم اولیه ی معادله ی دیراک استفاده کرده و نشان دهید که α_i ها و β نمی تواند ضرایب اسکالر باشند و باید عملگر (ماتریس) باشند. روابطی برای پاد جابه جاگر های آن ها بدست آورید.

دیراک نشان داد که کوچکترین ماتریس هایی که در این روابط صدق می کنند ماتریس های 4×4 به شکل زیر هستند:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ب) نشان دهید که این ماتریس ها در روابط پاد جابه جایی که بدست آوردید صدق می کنند و ماتریس های مناسب هستند.

این ماتریس ها که با نام ماتریس های دیراک یا ماتریس های گاما شناخته می شوند نمایش های جبر کلیفورد (Clifford Algebra) هستند که در تمرین بعد بیشتر با ویژگی های بنیادی آن ها و ارتباطشان با تبدیلات لورنتز آشنا خواهید شد.
ماتریس های دیراک به شکل معروف تر زیر نوشته می شوند:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I_{2\times2} & 0 \\ 0 & I_{2\times2} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \beta\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

که σ_i ها ماتریس های پائولی به شکل زیر هستند:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ج) رابطه ی پاد جابه جایی زیر را برای ماتریس های دیراک ثابت کنید که در آن $g^{\mu\nu}$ متریک در فضای مینکوفسکی است:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

حال برای اینکه معادله ی دیراک را به یک معادله ی کوانتومی تبدیل کنیم کافیست که عملگر های تکانه و هامیلتونی سیستم را که در مکانیک کوانتومی تحول زمانی تابع موج را مشخص می کند، قرار دهیم .

$$\begin{aligned} H \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \quad \overrightarrow{p} &\rightarrow -i\overrightarrow{\nabla} \\ H\psi = E\psi &= (\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p} + \beta m)\psi \\ \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}\psi &= (-i\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\nabla} + \beta m)\psi \\ \rightarrow (i\frac{\partial}{\partial t} + i\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\nabla} - \beta m)\psi &= 0 \end{aligned} \tag{۱}$$

و با تعریف γ^μ به شکل زسر به فرم هموردایی برای معادله ی دیراک می رسیم که در آن ∂_μ چهار بردار مشتق جزئی است.

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= (\gamma^0, \gamma^i) \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &= 0 \end{aligned} \tag{۲}$$

د) از معادله ی ۱ به معادله ی ۲ برسید.

از آن جایی که γ^μ ها ماتریس هایی 4×4 هستند می توان دید که جواب های معادله ی دیراک یعنی میدان ψ نمی تواند همچون میدان کلاین گوردون یک میدان اسکالر باشد بلکه یک میدان مختلط برداری است.
معادل هی دیراک یک معادله ی حرکت است و هدف ما پیدا کردن لاگرانژیی است که به این معادله بیانجامد. برای اینکه هامیلتونی بدست آمده از لاگرانژی که مشاهده پذیرمان است یک موجود فیزیک باشد نیازمندیم که لاگرانژی اولا هرمیتی بوده (برای ایکه ویژه مقادیر هامیلتونی حقیقی باشند) و دوما یک ناوردای لورنتزی باشد.

در حالت کلاین گوردون چنین اسکالر لورنتزی و هرمیتی را با استفاده از $\phi^*\phi$ که ϕ میدان کلاین گوردون است می ساختیم. اما می توان نشان داد که برای جواب های معادله ی دیراک $\psi^\dagger\psi \neq \Lambda(\psi^\dagger\psi)$ است که در آن Λ تبدیل لورنتز است. در نتیجه $\psi^\dagger\psi$ یک اسکالر لورنتزی نیست. برای حل این مشکل مزدوج دیراکی را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$$

و با تعریف این مزدوج جدید می توان نشان داد که $\bar{\psi}\psi$ یک اسکالر لورنتزی است که یعنی $\bar{\psi}\psi = \Lambda(\bar{\psi}\psi)$. ریشه ی این تعریف به این مسئله بر می گردد که ماتریس های دیراک پایه های جبر کلیفورد هستند و در نتیجه می توان تبدیلات لورنتز را برحسب شان بسط داد که موضوع بررسی دقیقترمان در تمرین بعد خواهند بود.

حال با پیدا کردن این اسکالر لورنتزی می توانیم لاگرانژی دیراک را که موجودی ناوردا و هرمیتی است معرفی کنیم. قبل از آن باید یک مسئله را چک کنیم:

ه) ثابت کنید که $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ هرمیتی است. یعنی: $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^\dagger$

با این مقدمات لاگرانژی دیراک را که شمال دو جمله ی جنبشی و جرمی به شکل زیر است معرفی می کنیم.

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

و) با نوشتن معادلات اویلر لاگرانژ معادله ی دیراک را از لاگرانژی دیراک بدست آورید.

حال می خواهیم به تقارن های معادله ی دیراک بپردازیم. مشاهده پذیر ما در مکانیک کوانتومی خود تابع موج نیست بلکه احتمال یعنی $|\psi|^2$ است. ضرب شدن یک فاز احتمال را تغییذر نمی دهد و در نتیجه جواب های معادله علاوه بر خود تابع موج ψ ، $e^{-i\alpha}\psi$ هم هستند. $U = e^{-i\alpha}$ یک تبدیل یکانی است. در این جا α وابستگی مکانی ندارد و یک ثابت است در نتیجه به ای تبدیل و تقارنی که از ناوردایی تحت این تبدیل می آید تقارن سرتاسری $U(1)$ می گوییم. ((Global U(1))

وجود علیت در نسبیت خاص باعث می شود که دیگر نتوانیم به این تقارن به صورت سرتاسری نگاه کنیم زیرا در نسبیت تنها ارتباط های علی وجود دارند که شامل برهمکنش های فوتون ها و ذرات هستند و دیگرز معنایی ندارد که از یک α سرتاسری برای نقاطی که حتی می توانند ارتباط علی نداشته باشند صحبت کنیم. در اینجا یک تقارن قوی تر داریم و آن این است که ضرب یک فاز دلخواه در هر نقطه ی فضا زمان باید بلامانع باشد زیرا ارتباط های غیر علی وجود ندارند و در نتیجه می توانیم یک α ، فاز داشته باشیم که دیگر ثابت نیست و بلکه تابعیت x دارد. به این تبدیل جدید تبدیل موضعی $U(1)$ می گوییم و به شکل زیر خواهد بود:

$$\psi \to \psi' = e^{-i\alpha(x)}\psi$$

(Local U(1))

ز) لاگرانژی دیراک را تحت تبدیل سرتاسری و موضعی $U(1)$ بنویسید. آیا تبدیل سرتاسری $U(1)$ یک تقارن لاگرانژی دیراک است؟ تبدیل موضعی چطور؟

دیدید که تبدیل موضعی $U(1)$ یک تقارن لاگرانژی دیراک نیست و تحت آن:

$$\mathcal{L}_{Dirac} \to \mathcal{L}'_{Dirac} = \mathcal{L}_{Dirac} + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\alpha(x)\psi$$

به نظر می رسد که این مشکل بزرگی بر سر راه نوشتن یک معادل هی کوانتومی نسبیتی باشد، اما فاینمن با نبوغ خود از این مشکل برای بنیان نهادن الکترودینامیک نسبیتی استفاده کرد. در اینجا می خواهیم ای نمراحل را طی کرده و یک لاگرانژی مناسب برای تئوریی شامل برهمکنش فوتون ها و الکترون به صورت طبیعی بیابیم.

ارتباطات و برهمکنش های بین نقاط مختلف فضا زمان به صورت علی و از طریق برهمکنش های ذرات (رد و بدل شدن فوتون) رخ می دهد. در نتیجه برای توصیف کامل یک سیستم تنها لاگرانژی دیراک کافی نیست و نیازمند دانستن لاگرانژیی کلی و شامل برهمکنش های ذرات با میدان الکترومغناطیسی هستیم و این موجود است که باید با علیت در توافق باشد.

لاگرانژی سیستمی شامل الکترون ها (با لاگرانژی دیراک توصیف می شوند.) و فوتون ها (با لاگرانزی الکترومغاطیس توصیف می شوند) که با یکدیگر برهمکنش می کنند باید به شکل زیر باشد:

$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{Interaction}$$

با توجه به علیت می خواهیم که این لاگرانژی کل تحت تبدیلات موضعی $U(1)$ ناوردا باقی بماند. لاگرانژی الکترومغناطیسی و لاگرانژی برهمکنش بین فوتون ها و الکترون ها را به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$
$$\mathcal{L}_{Interaction} = e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}$$

ح) لاگرانژی کل را تحت تبدیل موضعی $U(1)$ بیابید.

دیده می شود که به علت جمله ی اضافه تری که در تبدیل $\mathcal{L}_{Dirac}$ ظاهر می شد این لا گرانژی کل تحت تبدیل موضعی $U(1)$ همچنان ناوردا نیست و یک جمله ی اضافه تر دارد. اما هنوز ازادیی وجود ندارد که از ان استفاده نکرده ایم و می تواند مشکل ما را حل کند. همان طور که از الکترومغناطیس کلاسیک می دانید مشاهده پذیر های الکترومغناطیسی میدان های الکتریکی و مغناطیسی هستند و در انتخاب پتانسیل هایی که این یمدان ها را به ما بدهد آزادیی داریم که به آن آزادی پیمانه ای می گوییم. در این جا میدان ها به تانسور الکترومغناطیس $F_{\mu\nu}$ و پتانسیل به چهار بردار پتانسیل A_{μ} ترجمه می شود.

ط) ثابت کنید که تانسور الکترومغناطیسی تحت تبدیل زیر برای پتانسیل برداری ناوردا باقی می ماند:

$$A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}X$$

که در آن X یک تابع دلخواه است.

ی) حال از این آزادی جدید استفاده کنید و تابع دلخواه X را به گونه ای بیابید که $\mathcal{L}_{total}$ تحت تبدیل موضعی $U(1)$ ناوردا باقی بماند.

دیدیم که لاگرانزی کل حاکم بر تئوری الکترون ها و فوتون ها ردر پیمانه ی خاص انتخاب شده در قسمت "ی" تحت تبدیل موضعی $U(1)$ ناوردا بوده و در نتیجه با علیت در توافق است. این یعنی که الکترودینامیک نسبیتی QED یک نظریه ی پیمانه ای است. (Gauge Theory)

۲ گرانش!

تا بحال فرم نظریه های مختلف فیزیکی را در نسبیت خاص بررسی کرده ایم و تمام چیزهایی که تا ۱۹۰۵ در فیزیک شناخته میشدند را کم و بیش به فرم نسبیتی بیان کردیم، اما یک نظریه که روی آن بحث نکرده ایم گرانش است. آیا گرانش تفاوت خاصی دارد که باید در نسبیت خاص خاموش باشد؟ به طور منطقی قدم بعدی در بررسی نسبیت خاص بیان گرانش در چارچوب این نظریه است. فیزیک نسبیتی با نظریه میدان های کلاسیک نسبیتی خیلی خوب سازگار است پس معقول است که گرانش را به صورت یک نظریه میدان کلاسیک بیان کنیم. به گفته خود اینشتین:

"I came a first step closer to a solution of the problem when I tried to treat the law of gravitation within the framework of special relativity theory. Like most authors at that time، I tried to formulate a field law for gravity، since the introduction of action at a distance was no longer possible، at least in any natural way، due to the elimination of the concept of absolute simultaneity. The simplest and most natural procedure was to retain the scalar Laplacian gravitational potential and to add a time derivative to the Poisson equation in such a way that the requirements of the special theory would be satisfied. In addition، the law of motion for a point mass in a gravitational field had to be adjusted to the requirements of special relativity. Just how to do this was not so clear، since the inertial mass of a body might depend on the gravitational potential. In fact، this was to be expected in view of the principle of mass-energy equivalence."

منظور از حرف بالا این است که باید یک کنش میدان برای گرانش کلاسیک نوشت و همینطور باید بتوان این میدان گرانشی را با ذرات جرم دار کوپل کرد. معادله میدان کلاسیک گرانش معادله پوآسون است:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \tag{۱}$$

نابر حرف اینشتین در بالا باید این معادله میدان را به صورتی نوشت که دارای رفتار خوب نسبیتی باشد. برای این کار عملگر دالامبر را چایگزین عملگر لاپلاس میکنیم. مشکل دوم آن است که در سمت راست معادله پوآسون ρ ظاهر شده است که اسکالر

لورنتزی نیست. موجودی که از دید میدان کلاسیک میتواند جایگزین خوبی یاشد رد تنسور انرژِی تکانه میدان های حاضر در فضازمان است. با این اوصاف خواهیم داشت:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \kappa T^\mu_\mu. \tag{۲}$$

۱.۲ الف

(چگالی) لاگرانژی الکترومغناطیس را متصور شوید:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{۳}$$

برای این لاگرانژی تنسور انرژی تکانه را بدست آورید. سپس نشان دهید رد این تنسور صفر است. دقت کنید منظور از رد $T^\mu_\mu = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ است.

در سال ۱۹۱۹ آرتور ادینگتون در خورشید گرفتگی موفق شد خم شدن نور در نزدیکی خورشید را آزمایش کند. بنابر نتایج وی نور تحت تاثیر گرانش قرار میگرفت و به اصطلاح مسیر آن خم میشد. آیا مدل $\partial_\mu \partial^\mu \phi = \kappa T^\mu_\mu$ برای توصیف این خم شدن نور در گرانش کار میکند؟

اما آزمایش ادینگتون سالها پس از فرمول بندی نسبیت خاص و حتا بعد از فرمول بندی نسبیت عام انجام شده است. پس نمیتوان استدلال بالا را دلیل محکمی برای کنار گذاشتن گرانش در نسبیت خاص دانست.

۲.۲ ب

اگر بنا باشد ذره به میدان گرانشی به طور سازگار با نسبیت خاص کوپل شود باید بتوان به هر نحوی یک چهار بردار نیرو F^μ (با ادغام تنسوری که قرار است میدان گرانشی را توصیف کند با تنسور های دیگر و یافتن یک موجود با یک اندیس.) به گرانش نسبت داد که در معادله تحول ذره صدق کند:

$$m \frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu(\tau) = F^\mu. \tag{۴}$$

حال با استدلال ساده بگویید که شتاب راستای z نمیتواند مستقل از سرعت افقی ذره باشد. (به روابط شتاب نسبیتی فکر کنید.)

استدلال بالا بیان میکند که نوشتن گرانش با شیوه ساده ای که برای سایر نیرو های بنیادی در نسبیت خاص عمل میکردیم به یک ناسازگاری بزرگ می انجامد. نتیجه ی بالا با این حرف که شتاب گرانشی تمام اجسام در میدان گرانشی یکسان است یا اصل هم ارزی تناقض دارد. شاید بتوان استدلال هایی از این قبیل را انگیزه ای برای اینشتین برای فکر کردن به اصل هم ارزی و گشتن به دنبال فرمول بندی ریاضی سازگار با آن در نسبیت عام دانست. چرا که خود او مینویسد:

”However، such considerations led to a result which made me extremely suspicious. According to classical mechanics، the vertical motion of a body in a vertical gravitational field is independent of the horizontal motion. This is connected with the fact that in such a gravitational field the vertical acceleration of a mechanical system، or of its center of mass، is independent of its kinetic energy. Yet، according to the theory which I was investigating، the gravitational acceleration was not independent of the horizontal velocity or of the internal energy of the system.
This in turn was not consistent with the well known experimental fact that all bodies experience the same acceleration in a gravitational field. This law، which can also be formulated as the law of equality of inertial and gravitational mass، now struck me in its deep significance. I wondered to the highest degree about its validity and supposed it to be the key to a deeper understanding of inertia and gravitation. I did not seriously doubt its strict validity even without knowing the result of the beautiful experiment of Eötvös، which—if I remember correctly—I only heard of later. I now gave up my previously described attempt to treat gravitation in the framework of the special theory as inadequate. It obviously did not do justice to precisely the most fundamental property of gravitation.”

۳ قانون کولن

در این تمرین قصد داریم قانون کولن را با نظریه میدان کلاسیک بدست آوریم.

۱.۳ الف

لاگرانژی الکرومغناطیس را به یاد آورید:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu. \quad (۵)$$

با استفاده از این لاگرانژی و معادله اویلر لاگرانژ، معادله زیر را بدست آورید:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (۶)$$

حال پیمانه ی لورنز ($\partial_\mu A^\mu = 0$) را در نظر بگیرید و نشان دهید:

$$\Box A_\nu(x) = J_\nu(x). \quad (۷)$$

جواب معادله بالا به طور فرمال به صورت زیر نوشته میشود:

$$A_\nu(x) = \frac{1}{\Box}J_\nu(x). \quad (۸)$$

در این عبارت $\frac{1}{\Box}$ صرفن نمادی است برای وارون عملگر دالامبر است. معادله بالا بیان میکند که میدان A_ν با منبع J_ν پس از آنکه به وسیله ی انتشارگر $\frac{1}{\Box}$ انتشار یابد، مشخص میشود.
حال به مساله ی پتاسیل کولن باز میگردیم. برای این پتانسیل منبع باید به صورت زیر باشد:

$$J_\mu(x) = (e\delta^3(x), 0, 0, 0). \quad (۹)$$

پس داریم:

$$A_i = 0, \quad A_0(x) = \frac{e}{\Box}\delta^3(x). \quad (۱۰)$$

۲.۳ ب

داریم:

$$\delta^3(x) = \int \frac{d^3k}{2\pi}e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}} \quad (۱۱)$$

استدلال کنید که $\frac{1}{\Delta}$ معادل با آن است که در انتگرال تبدیل فوریه، انتگرالده ضربدر $\frac{1}{-\boldsymbol{k}^2}$ شود. Δ عملگر لاپلاس است.
حال استدلال کنید که جون $\delta^3(x)$ مستقل از زمان است داریم:

$$A_0(x) = \frac{e}{\Box}\delta^3(x) = -\frac{e}{\Delta}\delta^3(x). \quad (۱۲)$$

حال با نوشتن فرم صریح این انتشارگر در انتگرال فوریه و استفاده $\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{k} = 2\pi i$ نشان دهید:

$$A_0(x) = \frac{e}{4\pi r}. \quad (۱۳)$$

که قانون کولن است.