دانشگاه صنعتی شریف
پاییز ۱۳۹۹

تمرین سری پنجم نسبیت خاص - دکتر شانت باغرام

صبا اعتضاد رضوی
s_etezadrazavi@yahoo.com

زهرا کبیری
kabiri.zahra98@gmail.com

کوروش علامه
kuroshallame@gmail.com

"It's been known for long time that some part of the brain lights up when you listen to nice music، or read nice poetry، or look at nice pictures، and all of those reactions happen in the same place. and the question was: Is the appreciation of mathematical beauty the same، or is it different؟ and the conclusion was it is the same. - Michael Atiyah"

موضوع این سری تمرین دینامیک و الکترودینامیک نسبیتی است..

جواب تمرین ها را به آدرس TA.baghram.1@gmail.com ایمیل کنید. در صورتی که میخواهید تمرین را با تاخیر تحویل داده و از ۷ روز مجاز تاخیری خود استفاده کنید، حتما در بالای صفحه ی اول تمرین تعداد روز هایی که استفاده میکنید را واضح و خوانا بنویسید.

مهلت ارسال جمعه ۵ دی ساعت ۱۱:۵۹ شب

۱ الکترودینامیک نسبیتی

درخواستی که ما برای ناوردایی شکل معادلات الکترودینامیک تحت تبدیلات لورنتز داریم باعث می شود که بخواهیم کمیت های مختلف الکترودینامیکی مثل E, B, J, ρ به روشی خوش تعریف تحت تبدیلات لورنتز تبدیل یابند.

معادله ی نیروی لورنتز را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\frac{dp}{dt} = q(E + \frac{v}{c} \times B)$$

که در این معادله p مانند قسمت فضایی چهاربردار تکانه عمل می کند. از درخواستمان برای داشتن فرمی هموردا برای این معادله و همچنین نتیجه ی تجربی ناوردایی بارالکتریکی یا به طور دقیقتر استقلال بار یک ذره از سرعت آن در آزمایش های متعدد، می توان استفاده کرد تا خواص تبدیلات لورنتز میدان های الکترومغناطیسی را تعیین کنیم.

معادله ی پایستگی بار در الکترودینامیک را می توان به شکل زیر نوشت که در آن $\boldsymbol{j}$ بردار جریان و ρ چگالی بار الکتریکی است.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \boldsymbol{j} = 0$$

این معادله به ما پیشنهاد می کند که چهار بردار جریان را به این شکل تعریف کنیم:

$$J^\alpha = (c\rho, \boldsymbol{j})$$

الف) نشان دهید که J^α یک چهار بردار است، یعنی مولفه های آن تحت تبدیل مختصات مثل مولفه های x^μ تبدیل می یابند. سپس چهار بردار مشتق را تعریف کرده و فرم همموردای قانون پایستگی بار را بنویسید.

در پیمانه ی لورنز، $\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla . \boldsymbol{A} = 0$ ، معادله ی موج برای پتانسیل های آشنای برداری $\boldsymbol{A}$ و نرده ای ϕ عبارت خواهند بود از:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \frac{4\pi}{c} j$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 4\pi\rho$$

با الهام گرفتن از این معادلات چهار بردار پتانسیل را هم به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$A^{\alpha} = (\phi/c, \boldsymbol{A})$$

ب) استدلال کنید که A^{α} هم واقعا یک چهار بردار است، سپس فرم هموردایی برای دو معادله ی موج مربوط به پتانسیل برداری و نرده ای بنویسید و همچنین شرط پیمانه ی لورنز را به شکل هموردا بیان کنید.

میدان های الکتریکی و مغناطیسی را برحسب پتانسیل های برداری و اسکالر به شکل زیر می توان نوشت:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

حال با استفاده از چهار بردار پتانسیل ۶ مولفه ی مربوط به میدان های E, B را در یک تانسور پادمتقارن مرتبه ی دوم به صورت زیر می گنجانیم:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \quad , \quad F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

که از آن جایی که A_{μ} یک چهار بردار است $F_{\mu\nu}$ یک تانسور خواهد بود و در نتیجه تحت تبدیل مختصات با استفاده از تبدیلات لورنتز Λ^{μ}_{ν} که در تمرین پیشین مفصل در مورد آن ها آموختید به صورت زیر تبدیل می یابد:

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} F_{\alpha\beta}$$

ج) حال ابتدا مولفه های تانسور الکترومغناطیسی را بدست آورده و شکل صریح ماتریسی آن را بنویسید سپس با استفاده از تبدیل تانسور الکترومغناطیسی که بیان شد تبدیلات نسبیتی هر یک از میدان های الکتریکی و مغناطیسی را بدست آورید.

با استفاده از این تانسور الکترومغناطیسی می توان ناوردا های لورنتزی مهم و فیزیکیی ساخت. دو نمونه از ناوردا های مهم لورنتزی $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ و $det(F)$ هستند که درمینان تانسور الکترومغناطیسی به صورت زیر تعریف می شود:

$$det(F) = \frac{1}{64}(\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta})$$

که در آن $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ تانسور لوی چویتا است.

د) این دو ناوردای لورنتزی را برحسب میدان های الکتریکی و مغناطیسی بدست آورید و راجع به معنای ناوردایی کمیت هایی که بدست آورده اید بحث کنید. این دو ناوردای لورنتزی چه چیزی راجع به میدان های الکتریکی و مغناطیسی و زاویه بین شان از دید ناظر های مختلف می گویند؟

حال می خواهیم به هدف اصلی مان که بدست آوردن فرم هموردای معادلات ماکسول و قانون لورنتز بود بپردازیم. برای هر تانسور مرتبه دوم پادمتقارن و دیفرانسیل کامل اتحاد ژاکوبی به صورت زیر وجود دارد:

$$\partial_{\mu} F_{\nu\rho} + \partial_{\nu} F_{\rho\mu} + \partial_{\rho} F_{\mu\nu} = 0$$

ه) اتحاد ژاکوبی را برای تانسور الکترومغناطیس ثابت کنید.

همان طور که می دانید قوانین ماکسول شامل قانون القای فارادی (۱)، عدم وجود تک قطبی مغناطیسی(۲)، قانون آمپر (۳) و قانون گاوس (۴) بوده و به شکل زیر هستند:

$$(1)\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$
$$(2)\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{B} = 0$$
$$(3)\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$
$$(4)\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

و) مولفه های اتحاد ژاکوبی را برای تانسور الکترومغناطیسی بنویسید و نشان دهید که معادل قانون القای فارادی و قانون عدم وجود تک قطبی مغناطیسی است.

ز) مولفه های قوانین گاوس و آمپر را بنویسید و سعی کنید با استفاد هاز تانسور الکترومغناطیس و چهاربردار جریان معادله ای با فرم هموردا بیابید که هر دو این قوانین را در دل خود داشته باشد.

ح) نشان دهید که معادله ی قانون لورنتز را هم می توان به فرم هموردای زیر نوشت:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = m\frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}U_\beta$$

که U^α چهار بردار سرعت است.

۲ حد GZK

در سال ۱۹۶۰ سه فرد به نام های Kenneth Greisen و Vadin Kuzmin و Georgiy Zatspein حد بالایی برای انرژی ذرات کیهانی پیش بینی کردند.

پروتون های پرتو های کیهانی می توانند تحت واکنش زیر به پروتون های کم انرژی تر و پایون تبدیل شوند:

$$p^+ + \gamma \to p^+ + \pi^0$$

اگر این واکنش ها به صورت دائم بتوانند رخ دهند به ما می گوید که پروتون های پرتو های کیهانی نمی توانند انرژیی بالاتر از یک threshold مشخص داشته باشند زیرا با وجود یک فوتون به پروتون های کم انرژی تر و پایون واپاشی می کنند.
اما حال سوال سر راه این است که ایا همواره چنینی فوتون هایی وجود دارند که با برهمکنش با پروتون های پرتو های کیهانی رخداد دائمی این واکنش را تضمین کنند؟ در واقع نیازمند توزیعی از فوتون ها در همه جا و همه جهت در کیهان برای اتفاق افتادن این واکنش ها به صورت دائمی هستیم.

امروزه می دانیم که چنین توزیع گرمایی از فوتون ها وجود دارد که معروف به تابش زمینه ی کیهانی CMB است.
دیده شدن تجربی وجود حدی برای انرژی پوروتون های کیهانی، حد GZK ، یکی از مهمترین و اولین شواهد وجود تابش زمینه ی کیهانی بوده است. در این سوال می خواهیم تقریبی از مقدار این حد بیابیم.

ابتدا در نظر بگیرید که P_γ و P_p چهار بردار های تکانه ی پروتون اولیه و فوتون های CMB باشند و $P_{p'}$ و P_π چهار بردار های تکانه ی پروتون های ثانویه و پایون هستند. می خواهیم از پایستگی تکانه در واکنش

$$p^+ + \gamma_{CMB} \to p^+ + \pi^0$$

استفاده کنیم و حد پایین انرژی پروتون ها برای رخ دادن این واکنش را بیابیم.

الف) فرض کنید که پروتون ثانویه و پایون کمترین انرژی ممکن را دارند و $(P_{p'} + P_\pi)^\mu(P_{p'} + P_\pi)_\mu$ را برحسب جرم پروتون m_p و جرم پایون m_π بیابید.

ب) فرض کنید که برخورد پروتون اولیه و فوتون سر به سر باشد (head on) ، حال سمت دگر معادله ی پایستگی تکانه ی واکنش یعنی $(P_p + P_\gamma)^\mu(P_p + P_\gamma)_\mu$ را بدست آورده و برحسب انرژی پروتون اولیه E_p و انرژی فوتون CMB ، E_{CMB} بیان کنید.

ج) حال با استفاده از دو قسمت قبل انرژی پروتون اولیه را برحسب E_{CMB}, m_π, m_p بدست آورید.

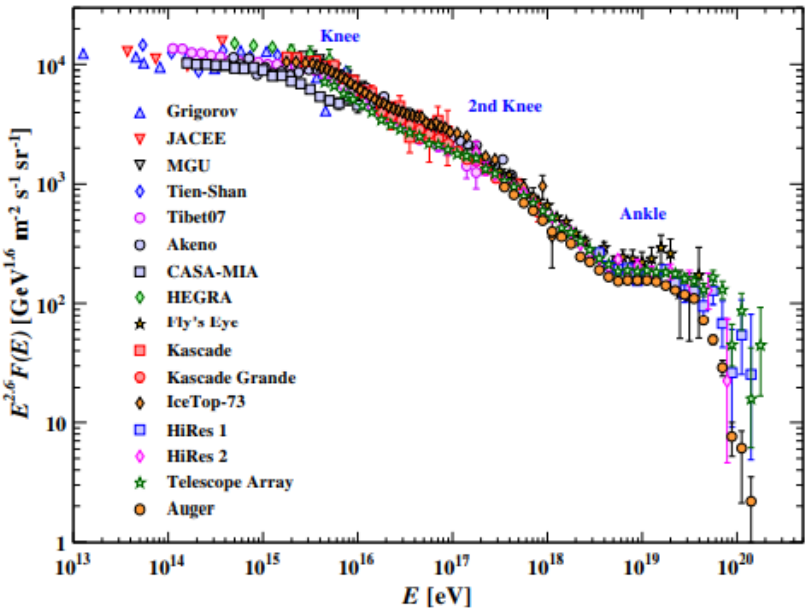
د) از رصد های تابش زمینه ی کیهانی می دانیم که این تابش، تابشی گرمایی در دمای 2.7^K است و همچنین برای جرم پروتون و پایون داریم: $m_p = 938\,Mev, \quad m_\pi = 135\,Mev$. مقدار عددی کمینه انرژی پروتون اولیه برای اینکه این واکنش رخ دهد را برحسب الکترون ولت بیابید.

این انرژی که محاسبه کردید همان حد GZK است که می گوید پروتون های کیهانی با انرژی بالاتر از این مقدار در واکنشی با فوتون های CMB انرژی خود را از دست می دهند.

حال نمودار زیر توزیع انرژی ذرات کیهانی را با استفاده از داده های آزمایش های مختلف نشان می دهد. محور افقی انرژی ذرات برحسب الکترون ولت و محور عمودی تعداد ذرات کیهانی است.

ه) مقدار حد GZK تجربی را برای انرژی ذرات کیهانی از روی این نمودار بخوانید و با مقداری که خودتان بدست آوردید مقایسه کنید.

From K.A Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 010009 (2014) :۱ Figure and 2015 update



با در نظر گرفتن جزئیات ترمودینامیکی تابش CMB محاسبه ی دقیق تری از این حد می توان داشت که حدود ۵ بار کوچکتر از مقداری است که ما در این مسئله بدست آوردیم.

برای اطلاعات بیشتر راجع به حد GZK مقاله های زیر را می توانید نگاه کنید:
"End to the Cosmic-Ray Spectrum?" - Greisen, Kenneth
"Upper Limit of the Spectrum of Cosmic Rays" - Zatsepin, G. T.; Kuz'min, V. A.

۳ میدان یک سیم باردار

یک سیم بینهایت که دارای چگالی بار طولی λ_0 است در نظر بگیرید.

الف) میدان الکتریکی آن را در دستگاه سکون سیم به دست آورید.

حالا در نظر بگیرید سیم در دستگاه آزمایشگاه با سرعت v در راستای سیم در حال حرکت است.

ب) میدان الکتریکی و مغناطیسی در دستگاه آزمایشگاه را با استفاده از روابط تبدیل میدان بین دو دستگاه به دست آورید.

ج) از قانون بقای بار استفاده کنید و نشان دهید چگالی طولی بار الکتریکی برابر $\lambda = \gamma\lambda_0$ خواهد شد. حالا میدان الکتریکی و مغناطیسی در دستگاه آزمایشگاه را با استفاده از قوانین ماکسول به دست آورید. (با همان روشی که تا قبل از آشنایی با نسبیت خاص میدان محاسبه می کردید) جواب را با میدان هایی که در بخش قبل به دست آوردید مقایسه کنید.