به نام خدا

نسبیت خاص

تمرین سری چهارم

موعد تحویل : شنبه ۲۹ آبان ۱۳۹۵ ساعت ۹ تا ۱۰:۳۰ سر کلاس و پس از آن تحویل گرفته نمی شود .

سوال اول : ابیراهی ذره

فرض کنید ذره ای داریم که در دستگاه s، با سرعت u و زاویه ی α نسبت به محورx حرکت میکند. نشان دهید که زاویه ای که این ذره از دید ناظر S' با محور x' می سازد از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$\tan\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\gamma(v)\,(\cos\alpha - v/u)}$$

راهنمایی : از رابطه تبدیل سرعت ها استفاده کنید.

سوال دوم : ابیراهی موج تخت

یک صفحه با معادله ی $x\,cos\alpha + y\,sin\alpha = wt$ در نظر بگیرید. می دانیم که این صفحه با سرعت w در راستای بردار عمودش که با محور x زاویه ی α می سازد در حال حرکت است. توجه کنید که می توانیم این صفحه را به عنوان جبهه ی موج تختی نیز دز نظر بگیریم. حال، دستگاه s' را نیز در نظر بگیرید. با تبدیل لورنز ، x, y, t را به کمیات متناظر در دستگاه s' ببرید. نشان دهید که زاویه ِ بردار عمود بر صفحه، از دید ناظر S' از رابطه زیر به دست می آید:

$$\tan\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\gamma(v)\,(\cos\alpha - wv/c^2)}$$

نتیجه گیری : از این رابطه و رابطه ی سوال قبل، قیدی بین سرعت یک ذره و یک موج بیابید تا این دو از دید همه ی ناظر ها، ابیراهی یکسانی داشته باشند. یعنی برای اینکه این موج و این ذره دو روی یک موجود باشند، باید رابطه ی بالا بین سرعت ها بر قرار باشد، که همان مفهوم موج-ذره در مکانیک کوانتومی است. سرعت موج همان سرعت فاز و سرعت ذره، همان سرعت گروه موج دوبروی می باشد.

منبع: سوال ۱۳,۴ و ۱۴,۴ ریندلر

سوال سوم : تقدیم توماس

دستگاه S و S' معمول را در نظر بگیرید. دستگاهS'' محور هایش با محور های دستگاه S' موازیند و سرعت v' در راستای محور y' دارد. اگر زاویه ی راستای حرکت نسبی دستگاه های S و S'' با محور های x و x'' به ترتیب برابر θ و θ'' باشند. نشان دهید:

$$\tan\theta = \frac{v'}{v\,\gamma(v)}$$
$$\tan\theta'' = \frac{v'\,\gamma(v')}{v}$$

زاویه ی میل S'' نسبت به S را به صورت $\delta\,\theta = \theta'' - \theta$ تعریف میکنیم. در تقریب سرعت های پایین(هر دو سرعت) نشان دهید : $\delta\theta = \frac{vv'}{2c^2}$.

حال، ذره ای را در نظر بگیرید که در یک دایره با سرعت ثابت v در حال گردش است. دستگاه S را دستگاه لخت آزمایشگاه و دستگاه های S' و S'' را دستگاه های لخت موضعی روی دایره بگیرید. نشان دهید که زاویه ی میل دستگاه S و S'' پس از یک دور گردش برابر می شود با: $\frac{\pi\,v^2}{c^2}$.

راهنمایی: دستگاه های S' و S'' را بگونه ای بگیرید که محور های x', x'' در راستای مماس بر دایره و محورهای y', y'' در راستای شعاع دایره باشند. بنابراین $v' = v^2\,dt/a$ که a شعاع دایره است.

در مورد کاربرد این مسئله در مکانیک کوانتومی جستجو کنید(برای خودتان)!

منبع : ریندلر ۱۵,۳

سوال چهارم

دری این سوال میخواهیم به پدیده ای اپتیکی اشاره کنیم که در نسبیت خاص اثری جالب ایجاد میکند. فرض کنید منبع نوری در دستگاه متحرکی ثابت شده است. و به صورت همگن در همه جهات نور پخش میکند.نشان دهیددر سرعت هاي بالا ، در دستگاه ساکن ، نور در یک مخروط باریک تمرکز یافته است. در واقع نصف فوتون های ساطع شده در مخطروطی هستند که نیم زوایه ي آن ها از رابطه زیر تبعیت میکنند :

$$\sin\theta = ۱/\gamma$$

به این پدیده " اثر هدلایت " میگویند که کاملا با اپتیک کلاسیك متفاوت است.

سوال پنجم

فرض کنید نوری همگن و تک فرکانس در دو دستگاه لخت دلخواه مشاهده میشود. که آن ها را دستگاه s و s' مینامیم. نور ها لزوما با محور x موازی نیستند. اگر ν و ν' فرکانس های مربوطه به دستگاه های s و s' باشند نشان دهید که نسبت ρ/ρ' که نسبت چگالی فوتون ها در واحد حجم را نشان میدهند برابر است با ν/ν' .

سوال ششم : عبور از چراغ قرمز

الف) نشان دهید که انتقال داپلری را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\lambda = \lambda_۰(۱ - \beta + \frac{۱}{۲}\beta^۲ + ...) \qquad \texttt{approaching}$$

$$\lambda = \lambda_۰(۱ + \beta + \frac{۱}{۲}\beta^۲ + ...) \qquad \texttt{receeding}$$

$$\lambda = \lambda_۰(۱ + \frac{۱}{۲}\beta^۲ + \frac{۳}{۸}\beta^۴ + ...) \qquad \texttt{transverse}$$

ب) در حالتی که جهت سرعت مشاهده گر با منبع نور زاویه θ می سازد ، عبارت مشابهی را تا مرتبه $\beta^۲$ بدست آورید.
ج) طول موج نور قرمز ۶۵۰ و طول موج نور زرد ۵۷۰ نانومتر است. شما با چه سرعتی باید به سمت چراغ قرمز حرکت کنید تا آن چراغ را زرد ببینید؟

سوال هفتم

یک آینه تخت در راستای عمود بر سطحش با سرعت یکنواخت v در حرکت است(در دستگاه S) یک پرتو نور با بسامد $f_۱$ ، با زاویه θ برخورد می‌کند و با زاویه ϕ و بسامد $f_۲$ بازتاب می‌یابد.
ثابت کنید:
الف)

$$\frac{\tan(\frac{\theta}{۲})}{\tan(\frac{\phi}{۲})} = \frac{c+v}{c-v}$$

ب)

$$\frac{f_۲}{f_۱} = \frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{c\cos\theta + v}{c\cos\phi - v} = \frac{c + v\cos\theta}{c - v\cos\theta}$$

لطفاً نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود و نام دستیار آموزشی را بالای برگه تحویلی بنویسید.