

به نام خدا
نسبیت خاص
تمرین سری نخست

موعد تحویل : دوشنبه ۱۲ مهر ۱۳۹۵ ساعت ۹ تا ۱۰:۳۰ سر کلاس و پس از آن تحویل گرفته نمی شود .

تعارض تبدیلات گالیه ای و معادلات ماکسول

در این سوال قصد داریم تا ناوردا نبودن معادلات ماکسول تحت تبدیلات گالیه ای را مشاهده کنیم . یعنی میخواهیم نشان دهیم قوانین ماکسول که قبل از نسبیت خاص وضع شده اند خود به خود نسبیتی هستند و تبدیلات حاکم بر آن ها نمیتواند گالیه ای باشد چون تحت این تبدیلات ناوردا باقی نمی ماند. قوانین چهارگانه ماکسول در الکترومغناطیس دینامیک میدان های الکتریکی و مغناطیسی را مشخص میکنند.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= \rho \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B &= \frac{\partial E}{\partial t} + J\end{aligned}$$

لازم به ذکر است که معادلات ماکسول در خلا نوشته شده اند. (و بدون در نظر گرفتن منبع) یعنی از حضور مواد دی الکتریک و مغناطیسی صرف نظر کردیم تا معادلات به فرم ساده تری در بیایند و در ضمن تمام ثوابت مسئله در واحد های طبیعی بازنویسی شده اند که مقدار آن ها یک است. در قدم اول ثابت کنید که اگر دو ناظر به وسیله تبدیل های گالیه ای به هم تبدیل شوند، فرآیند گرفتن مشتق های زمانی و مکانی تغییر نمیکند. سپس استدلال کنید اگر فرآیند گرفتن مشتق برای دو ناظر تغییر نکند، قانون دوم نیوتن تحت تبدیلات گالیه ای ناوردا باقی میماند.

$$\begin{aligned}\nabla &= \nabla' \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'}\end{aligned}$$

در تبدیلات گالیه ای آن چه ناوردا باقی میماند (یعنی از دیدگاه تمام ناظر ها به یک مقدار اندازه گیری میشود) نیرو یا شتاب است. به همین دلیل اگر قانون دوم نیوتن در یک چهارچوب معتبر باشد در همه چهارچوب هایی که نسبت به آن لخت باشند، معتبر میباشد. برای همین کلید اصلی در این تمرین این است که به سراغ نیرو ها برویم. میدانیم که در الکترومغناطیس بر هر جسم نقطه ای متحرک و باردار نیرویی به نام نیروی لورنتس وارد میشود. این نیرو تابع میدان الکتریکی و مغناطیسی و سرعت حرکت جسم باردار است که به آن نیرو وارد میشود.

$$F = Eq + qv \times B$$

حال اگر تبدیلات گالیه ای در الکترومغناطیس درست باشند باید دو ناظر مختلف نیرویی که به یک جسم باردار وارد میشود را یکسان اندازه گیری کنند.

$$F = F'$$

$$Eq + qv \times B = E'q + qv' \times B'$$

از این فرض استفاده کنید و نشان دهید این فرض (ناوردایی نیرو یا همان درست بودن تبدیلات گالیه ای) با قوانین ماکسول در تناقض است. به زبان ساده تر اگر فرض ناوردایی نیرو ها درست باشد آنگاه قوانین ماکسول نمیتواند در هر دو دستگاه یکی باشد. حال معادلات ماکسول را در خلا در نظر بگیرید. (یعنی حالتی که چگالی جریان و بار الکتریکی صفر باشد). ثابت کنید معادلات ماکسول در خلا تحت تبدیلات دوران و انتقال :

$$x'^i = a^i + \sum R_{ij} x^j$$

ناوردا هستند.

آزمایش ذهنی ارنفست

پل ارنفست (۱۸۸۰-۱۹۳۰) آزمایش ذهنی را طراحی کرده است که نشان دهد که نور تحت دو نظریه باد "اتری" و فرض دوم ایششتین رفتار های متفاوتی دارد. فرض کنید که در مرکز کره ای به شعاع 3×10^8 متر قرار دارید. سطح داخلی کره کاملا بازتاب کننده نور است. سپس منبع نور در مرکز یک پالس نوری را ارسال میکند که به صورت کروی و همگن در تمام جهات پخش میشود. توضیح دهید که تحت هر کدام از فرض های زیر چه مشاهده ای انجام میدهید؟ فرض اول: فرض کنید جریان پایایی از باد اتری وجود دارد فرض دوم: باد اتری وجود ندارد و فرض دوم ایششتین صحیح میباشد. فرض دوم ایششتین این است که سرعت نور در تمامی چهارچوب ها مستقل از ناظر و منبع نور است و مقدار آن ثابت c میباشد.

رابطه این آزمایش را با آزمایش مشهور مایکلسون و مورلی بیان کنید. آیا شباهت یا تفاوت خاصی میبینید؟

فرض همگنی و همسانگردی جهان

همان طور که میدانید، ما فیزیکدان ها دنیا را همگن و همسانگرد فرض میکنیم. در آینده می بینیم که این فرض هم توسط اینشتین برای طرح ریزی نسبیت خاص انجام شده بود. ولی چرا؟ چه دلیل قانع کننده ای پشت این فرض وجود دارد؟
سال ها در مکانیک نیوتونی پایستگی انرژی و تکانه خطی و زاویه ای برای سیستم های منزوی توسط آزمایشهای متعدد محک زده شده بود. حالا در این تمرین می بینیم که چگونه همگنی و همسانگردی دنیا به این حقیقت های آزمایشگاهی مربوط میشوند. ابتدا مقاداری یاد آوری از مکانیک کلاسیک می کنیم:
تعریف جابه جاگر پواسونی:

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \quad (1)$$

که در این رابطه q مکان تعمیم یافته (یعنی هر پارامتری که اطلاعاتی از مکان به ما بدهد) و p تکانه‌ی تعمیم یافته است. حالا برای هر تابع دلخواهی داریم:

$$\{q_i, f\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad \& \quad \{p_i, f\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (2)$$

با جایگذاری هامیلتونی داریم (از معادلات اوایلر-لاگرانژ هم استفاده می کنیم):

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\} \quad \& \quad \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\} \quad (3)$$

هم چنین برای هر تابع کلی می توان نشان داد:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \quad (4)$$

زمانی که تابع f صراحتاً به زمان وابسته نباشد :

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} \quad (5)$$

حالا نشان دهید:

(آ) اگر سیستم در زمان همگن باشد (هامیلتونی به طور صریح به زمان وابسته نباشد)، هامیلتونی (همان انرژی سیستم) پایسته است.

(ب) اگر سیستم در مکان همگن باشد (هامیلتونی با انتقال کوچک در مکان تغییر نکند)، تکانه خطی سیستم پایسته است. راهنمایی: هامیلتونی جدید را برحسب مکان تا مرتبه ی اول جابه جایی بسط بدید.

(پ) اگر سیستم در فضا همسانگرد باشد (هامیلتونی با دوران کوچک تغییر نکند)، تکانه زاویه ای سیستم پایسته است. راهنمایی: دوباره هامیلتونی جدید را تا مرتبه ی اول زاویه بسط دهید. در اینجا مکان و تکانه مطابق زیر تغییر می یابند:

$$r' = r + \theta(n \times r) \quad (6)$$

$$p' = p + \theta(n \times p) \quad (7)$$

تعریف تکانه زاویه ای:

$$L_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} r_j p_k \quad (8)$$

نتیجه: از قسمت های آ تا پ، نتیجه میگیریم که پایستگی ها پشتوانه ای برای فرض همگنی و همسانگردی به "صورت موضعی" هستند (آن چیزی که خود اینشتین در مقاله اش فرض کرده بود). برای نتیجه گیری کلی و غیر موضعی آزمایش ها باید در ابعاد بزرگتر انجام شوند.

برای تفکر و تحقیق (امتیازی)

- ۱- چرا نیوتن برای وضع قوانینش نیاز به تعریف زمان مطلق را احساس کرد؟
 - ۲- در مکانیک نیوتنی دستگاه لخت به دستگاہی گویند که نسبت به فضای مطلق با سرعت ثابت و بدون شتاب حرکت کند. حال اگر بخواهیم مفهوم فضای مطلق را باطل شده بدانیم، چه ایده‌ای برای بازتعریف دستگاه لخت دارید؟
 - ۳- یکی از دلایل فضای مطلق توسط نیوتن به شرح زیر است: یک کره‌ی مایع در حال چرخش، پخ می‌شود و میزان پخیدگی آن به سرعت چرخش کره بستگی دارد (مهم‌ترین دلیل پخیدگی زمین). اگر حرکت یک امر نسبی باشد، یعنی اگر کره را ثابت فرض کنیم و تمام اجسام عالم را حول کره بگردانیم باید نتیجه یکسان باشد. اما کره از کجا "میفهمد" که اجسام عالم در حال گردش هستند؟ نیوتن برای رفع این مشکل توضیح داد پخ شدن کره به دلیل تاثیر فضای مطلق روی کره است.
الف) مشکل توجیه نیوتن چیست؟
ب) درباره‌ی نظریه‌ی ماخ حول این موضوع تحقیق کنید.
پ) به نظر شما نظریه‌ی ماخ یک نظریه‌ی فلسفی‌ست یا فیزیکی؟ (نظریه‌ی فیزیکی باید تبعات فیزیکی در عالم داشته باشد).
ت) به نظر شما جواب نهایی برای این مسئله چیست؟
-

لطفاً نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود و نام دستیار آموزشی را بالای برگه تحویلی بنویسید.