۲-

دو جهت N و T را به ترتیب در راستای عمود بر سرعت و موازی آن انتخاب می کنیم؛ برای شتاب می توانیم بنویسیم:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\ \ \frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$= a_t\vec{T} + a_n\vec{N}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$v = A\alpha\sqrt{5 - 4\cos\alpha t}$$

$$a_t = \frac{2A\alpha^2\sin(\alpha t)}{\sqrt{5 - 4\cos\alpha t}}$$

$$a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2$$

$$a = A\alpha^2$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - {a_t}^2} = \frac{A\alpha^2|2\cos(\alpha t) - 1|}{\sqrt{5 - 4\cos\alpha t}}$$

با رسم a_n بر حسب زمان می بینیم که بیشینه a_n در $\alpha t = n\pi$ اتفاق می افتد، جایی که $a_n = A\alpha^2$

-۴

الف)

ابتدا معادله حرکت را برای ذره می نویسیم :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f}$$

$$\vec{f} = -b\left(v_x i + \left(v_y - u_a\right) j + v_z\, k\right)$$

اکنون قرار می دهیم :

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + b\vec{V}_1$$

بنابراین :

$$m\frac{d\left(v_{z(0)} + bv_{z(1)}\right)}{dt} = -mg - b\left(v_{z(0)} + bv_{z(1)}\right)$$

$$m\frac{d\left(v_{y(0)} + bv_{y(1)}\right)}{dt} = -b\left(v_{y(0)} + bv_{y(1)} - u_a\right)$$

$$m\frac{d\left(v_{x(0)} + bv_{x(1)}\right)}{dt} = -b\left(v_{x(0)} + bv_{x(1)}\right)$$

اکنون معادله مربوط به راستای z را تا اولین مرتبه از b نگه می داریم و جملات هم مرتبه را مساوی قرار می دهیم :

برای جمله مرتبه ۰ ام :

$$v_{z(0)} = V_{0z} - gt$$

که با انتظاری که داشته ایم برابر است. (در واقع جمله مرتبه ۰ ام معادل با نیروی اصطکاک ۰ است.)

برای جمله مرتبه اول :

$$v_{z(1)} = \frac{1}{m}\left(\frac{gt^2}{2} - V_{0z}t\right)$$

در نتیجه

$$v_z = V_{0z} - gt + \frac{b}{m}\left(\frac{gt^2}{2} - V_{0z}t\right)$$

با انتگرال گیری از معادله فوق داریم :

$$Z = V_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{bg}{m}\frac{t^3}{6} - \frac{b}{2m}V_{0z}t^2$$

برای محاسبه زمان رسیدن به برد(T) باید معادله Z=0 را حل کنیم. $V_{0z}T - \frac{1}{2}gT^2 + \frac{bg}{m}\frac{T^3}{6} - \frac{b}{2m}V_{0z}T^2 = 0$

مجددا قرار می دهیم :

$$T = T_0 + bT_1$$

با قرار دادن عبارت فوق در معادله مربوط به T و مساوی قرار دادن جملات هم مرتبه نتیجه می گیریم که :

$$T = \frac{2V_{0z}}{g} - \frac{2}{3} b \frac{V_{0z}^2}{mg}$$

ب) محاسبه برد :

ابتدا همانند معادله مربوط به راستای Z معادله مربوط به x و y را تا اولین مرتبه نسبت به b تعیین می کنیم

نتیجه به صورت زیر بدست می آید.

$$y = V_{0y}t + \frac{b}{2m}(u - V_{0y})t^2$$

$$x = V_{0x}t - \frac{b}{2m} V_{0x} t^2$$

اکنون برای تعیین نقطه برد، در ۲ معادله فوق زمان بدست آمده برای رسیده به نقطه برد(T) را قرار می دهیم و مجددا نتیجه را تا اولین مرتبه نسبت به b ساده می کنیم.

$$x_1 = \frac{2V_{0x}V_{0y}}{g} - \frac{8}{3}\frac{bV_{0z}^2 V_{0x}}{mg^2}$$

$$y_1 = \frac{2V_{0x}V_{0y}}{g} - \frac{8}{3}\frac{bV_{0z}^2 V_{0y}}{mg^2} + \frac{2bV_{0z}^2 u_a}{mg^2}$$

۶-

الف-

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}$$

ب-

با یک محاسبه ساده از قانون دوم نیوتن می توان به سادگی نشان داد که :

$$z = \frac{\boldsymbol{\omega_0^2 r^2}}{\boldsymbol{2g}}$$

پ-

$$f_{\boldsymbol{\theta}} = m(\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

با توجه به اینکه نیروی مماسی به ذره وارد نمی شود عبارت داخل پرنتز ثابت است.این ثابت را l می نامیم.

ت-

زاویه بین مماس بر سطح و صفحه افق را α می نامیم.

با نوشت معادله حرکت داریم

$$Ncos\alpha = mg + m\ddot{z}$$

$$-Nsin\boldsymbol{\alpha} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

از طرفی طبق الف می دانیم که

$$z = kr^2 \;=> \ddot{z} = 2k(\dot{r}^2 + r\ddot{r})$$

اکنون قرار می دهیم :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{l^2}{r^4}$$

$$\tan(\alpha) = 2kr$$

با جمع بندی معادلات فوق داریم :

$$\frac{\left(\dot{r}^2 + \ r\ddot{r} + \frac{g}{2k}\right)}{r^3\ddot{r} - l^2} = \ -\frac{1}{4k^2r^4}$$

ث)

$$\frac{\left(\dot{\delta}^2 + (r_0+\delta)\ddot{\delta} + \frac{g}{2k}\right)}{(r_0+\delta)^3\ddot{\delta} - l^2} = -\frac{1}{4k^2}(r_0+\delta)^{-4}$$

ج) اکنون با ساده سازی معادله فوق تا مرتبه اول داریم :

$$\delta + \Omega^2\ddot{\delta} = 0$$

$$\Omega^2 = \frac{4g^2\boldsymbol{\omega_0^2}}{\omega_0^4 r_0^2 + g^2}$$

در نتیجه

$$\delta = \frac{\dot{r}_0}{\Omega}\sin(\Omega t)$$

همچنین برای راستای زاویه ای داریم :

$$\dot{\theta} = \frac{l}{r^2} \implies \dot{\theta} = \frac{l}{(r_0+\delta)^2} = \frac{l}{r_0^2}\left(1 - \frac{2\delta}{r_0}\right)$$

که با جایگذاری δ و یک انتگرال گیری ساده $\boldsymbol{\theta}$ بر حسب زمان تعیین می شود.