مغناطیس ۲ - ۲۶ اسفند ۱۴۰۲

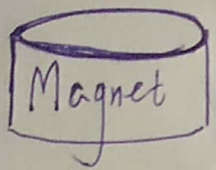
Magnetic force do no Work!

هدف این درس نشان دادن این ایده است

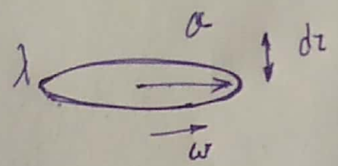
$$dW_{mag} = \vec{F}_{mag} \cdot d\vec{l} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}\,dt = 0$$

میدان مغناطیسی کار انجام نمی‌دهد.

$\vec{v}$ is perpendicular to $\vec{v} \times \vec{B}$.



- Car is a ferromagnet, electrons spinning, because of external magnetic field, all spins are lined-up.



We Can Model it as a loop of charge λ, glued on insulator. Spinning with ω.

s

دستگاه مختصات استوانه‌ای $(\hat{s}, \hat{\phi}, \hat{z})$

$$\boxed{\vec{F} = 2\pi I a \underbrace{B_s}_{\text{radial-component of magnetic field.}} \hat{z}}$$

$$\vec{F} = \int \underset{\hat{\phi}}{\vec{I}} \times \underset{\hat{s}}{\vec{B}}\, dl$$

$$I = \lambda 2\pi a \frac{1}{T} = \lambda a \frac{2\pi}{T} = \lambda a \omega$$

$$\vec{F} = 2\pi \lambda a^2 \omega B_s \hat{z} \longrightarrow$$

اگر جابه‌جا به اندازه dz بشه!

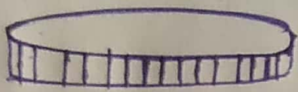
$$dW = 2\pi a^2 \lambda \omega B_s\, dz$$

Increase potential Energy of Ring.

At the same time, a motional emf is induced in the ring, which opposes the flow of charge, and hence reduces its angular velocity.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$d\Phi$ is the flux through ribbon,



$t+dt$

t

سطح در دو زمان t, $t+dt$

حلقه با شعاع a را در دو زمان نگاه می‌کنیم

$$\boxed{d\Phi = B_s (2\pi a)\, dz}$$

Now $\mathcal{E} = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = f(2\pi a)$

f: "force per unit-charge."

$$f(2\pi a) = -B_s (2\pi a) \frac{dz}{dt} \longrightarrow \boxed{f = -B_s \frac{dz}{dt}}$$

force on segment of length dl: $f\lambda dl = F$

torque on the ring.

$$\tau = a\left(-B_s \frac{dz}{dt}\right) \lambda (2\pi a)$$

τ: total torque. (گشتاور)

Work done on (slowing the rotation) is

کار / گشتاور / تغییر زاویه بر حسب چرخش

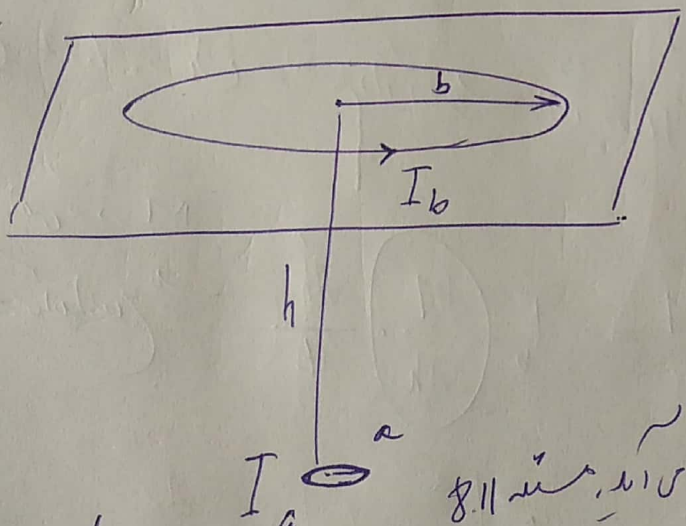
$$dW = \tau\, d\phi = \tau \omega\, dt \qquad d\phi = \omega\, dt$$

$$\boxed{dW = -2\pi a^2 \lambda \omega B_{\jmath}\, dz}$$

کاهش سرعت حلقه را داریم با افزایش پتانسیلی داریم

the ring slows down, and the rotational energy it loses is precisely equal to the potential energy it gains.

کاری که میدان مغناطیسی انجام می دهد انرژی را از صورتی به صورت دیگر تبدیل می کند.



مدل کردن مگنت، حلقه جریان I

Magnet.

آهنربای بزرگ را حلقه جریان با شعاع b مدل می کنیم به طوری که $b \gg a$

نیروی بین دو حلقه از رابطه زیر به دست می آید، مسئله 8.11 را در صفحات پیش حل کردیم

Problem 8.11

$$F_{mag} = \frac{3\pi}{2} \mu_0 I_a I_b \frac{a^2 b^2 h}{(b^2+h^2)^{5/2}} = m_a g$$

$$dW_g = m_a g\, dz = \frac{3\pi}{2} \mu_0 I_a I_b \frac{a^2 b^2 h\, dz}{(b^2+h^2)^{5/2}}$$

Who did it? چه کسی کار را انجام داده است؟

- The work is done by the power supply that sustains the current in loop a!

- As the loop rises, motional emf induced in it.

a شار عبوری از حلقه به شعاع

ضریب القای متقابل

$$\Phi_a = M I_b \rightarrow$$ جریان گذرنده از حلقه به شعاع b

M is the mutual inductance of the loop.

$$M = \frac{\pi\mu_0}{2}\cdot\frac{a^2 b^2}{(b^2+h^2)^{3/2}}$$

Problem 7.22 ✓

در مسئله 7.22، نشان خواهیم داد که ضریب القای متقابل از رابطه بالا به دست می‌آید

Emf is

$$\mathcal{E}_a = -\frac{d\Phi_a}{dt} = -I_b\frac{dM}{dt} = -I_b\frac{dM}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$

کمیتی که در M تغییر می‌کند ارتفاع است

$\mathcal{E}$ → electromotive force

$$= -I_b\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\pi\mu_0}{2}\cdot\frac{a^2b^2}{(b^2+h^2)^{5/2}}(2h)\frac{-dz}{dt}$$

The work done by the power supply.

(FIGHTING AGAINST THIS MOTIONAL EMF)

$$dW_a = -\mathcal{E}_a I_a \, dt = \frac{3\pi}{2} \mu_0 I_a I_b \frac{a^2 b^2 h}{(b^2+h^2)^{5/2}} dz$$

Same as the work done in lifting the loop a;

دقیقاً برابر با کاری است که برای بالا بردن حلقه با شعاع a لازم بود.

نتیجه مهم

Faraday emf is induced in the upper loop.

$$\Phi_b = M I_a \Longrightarrow \mathcal{E}_b = -I_a \frac{dM}{dt}$$

and the work done by the power supply in ring b

(to sustain current I_b) is

$$dW_b = -\mathcal{E}_b I_b \, dt = \frac{3\pi}{2} \mu_0 I_a I_b \frac{a^2 b^2 h}{(b^2+h^2)^{5/2}} dz$$

exactly the same as dW_a !

Power supplies have done twice as much work as was necessary to lift junk car!

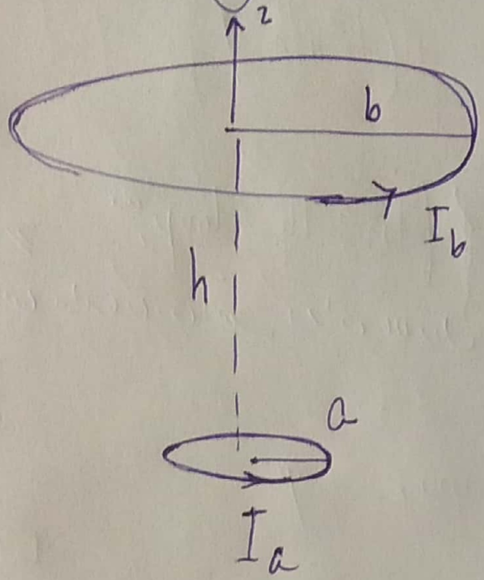
6

در این صفحه سعی شده 8.11 که نیروی بین دو حلقه سیم الکتریکی را محاسبه کنیم

Problem 8.11

نشان دهید

$$F_{mag} = \frac{3\pi}{2} \mu_0 I_a I_b \frac{a^2 b^2 h}{(b^2+h^2)^{5/2}} = m_a g$$



یک حلقه دایره‌ای

روبروی هم، مرکز در حلقه

به شعاع b

magnetic field of upper loop $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_b}{2} \cdot \frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}} \hat{z}$

Eq 5.41 as, we put the origin in center of upper loop.

$$z = -h$$

Treat the lower loop as a magnetic dipole

with $\vec{m} = I_a \pi a^2 \hat{z}$

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) = \nabla\left(I_a \pi a^2 \frac{\mu_0 I_b}{2} \cdot \frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

force on $\vec{m}$

$$= \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 I_a I_b}{2} \left(-\frac{3}{2}\right) (b^2+z^2)^{-5/2} (2z) \hat{z}$$

CamScanner

7,

$$\vec{F} = \frac{3\pi}{2}\mu_0 I_a I_b \frac{a^2 b^2 h}{(b^2+h^2)^{5/2}}\hat{z}$$

ged

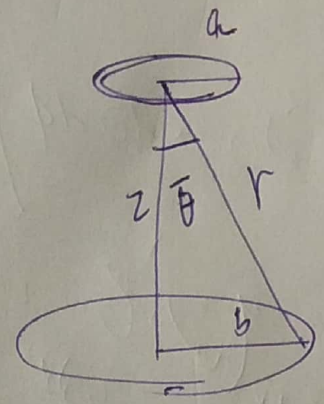
$z=-h$

Problem 7.22

در ادامه مسئله ۷.۲۲ کتاب M القای متقابل را بدست می‌آوریم

A small loop of wire (radius a) is held a distance z above the center of a large loop (radius b)

a) حلقه کوچک را آنقدر کوچک فرض کنید که میدان روی آن ثابت باشد.



b) حال فرض کنید جدا از loop a که گفته شد، آنقدر کوچک نیست که این حلقه شار در نقطه مشخصی را حساب کند

دو صفحه موازی، عمود بر خط واصل دو حلقه جدا

c) find Mutual inductance

Show $M_{12} = M_{21}$

(a) From 5.41 (on the axis)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 \pi I a^2 b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}$$

flux

(b) The field of dipole. $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} (2\cos\theta\, \hat{r} + \sin\theta\, \hat{\theta})$

$m = \pi a^2 I$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \pi a^2}{r^3} \int (2\cos\theta)(r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi)$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2}{2r} 2\pi \int_0^{\bar{\theta}} \cos\theta \sin\theta\, d\theta$$

where $r = \sqrt{b^2+z^2}$ $\quad \sin\bar{\theta} = \frac{b}{r}$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{r} \frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_0^{\bar{\theta}} = \frac{\mu_0 \pi I a^2 b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}$$

[illegible] $2\cos\theta$ [illegible]

Dividing off I

$$\Phi_1 = M_{12} I_2$$

$$\Phi_2 = M_{21} I_1$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(b^2 + z^2)^{3/2}}$$

حال برمی گردیم به سوال قبل که چرا برای بالا بردن حلقه به شعاع a دوبار کار انجام شده است

یک بار منبع تغذیه متصل به حلقه a، جریان آن را ثابت نگه داشته است.

و دیگری منبع تغذیه متصل به حلقه b، جریان آن حلقه را ثابت نگه داشته است.

پاسخ این پرسش در انرژی ذخیره شده، در میدان ها است.

Where the wasted energy go?

Answer: it increase energy stored in fields.

- برای اینکه نشان دهیم انرژی ذخیره شده افزایش پیدا میکند 8.12 حل شود

Problem 8.12

انرژی ذخیره شده در دو حلقه

$$U = \frac{1}{2} L_a I_a^2 + \frac{1}{2} L_b I_b^2 + M I_a I_b$$

so $\boxed{dU = I_a I_b \frac{dM}{dt} \cdot dt = dW_b}$

all four energy increments are the same.

تغییر یکی

Power supply in loop a ≡ Energy to lift lower ring.

Power supply in loop b ≡ Extra Energy for fields.

II

اگر تک قطب مغناطیسی را بیابیم

$$\vec{F} = q_e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) + q_m(\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\,\vec{v}\times\vec{E})$$

Problem 7.38

اگر تک قطب مغناطیسی وجود داشت ؟!

magnetic field can do work, but on magnetic charges.

حل مسئله 812

8.12 Power delivered to the two loops

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}_a I_a - \mathcal{E}_b I_b$$

$$\mathcal{E}_a = -L_a\frac{dI}{dt} - M\frac{dI_b}{dt} \qquad \mathcal{E}_b = -L_b\frac{dI_b}{dt} - M\frac{dI_a}{dt}$$

$$\frac{dW}{dt} = \left(L_a I_a\frac{dI_a}{dt} + M I_a\frac{dI_b}{dt}\right) + \left(L_b I_b\frac{dI_b}{dt} + M I_b\frac{dI_a}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_a I_a^2 + \frac{1}{2}L_b I_b^2 + M I_a I_b\right)$$

$$\rightarrow W = \frac{1}{2}L_a I_a^2 + \frac{1}{2}L_b I_b^2 + M I_a I_b$$