تشکیل ساختار و ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی

شانت باغرام

آخرین به روزرسانی: ۳ آبان ۱۳۹۳

۱ مقدمه

امروز کیهان شناسی به دلیل وجود داده های رصدی که از تلسکوپ های زمینی و فضایی و در طول موج های متفاوت الکترومغناطیس به دست آمده است، در دوران طلایی خود به سر می برد. همچنین وجود مدل های نظری قابل آزمون با داده های تجربی باعث شده است که کیهان شناسی به عنوان یک علم تجربی مورد توجه فیزیکدانان قرار بگیرد. یکی از مهمترین مباحث کیهان شناسی چه از دیدگاه رصدی و چه از دیدگاه تجربی تشکیل ساختار و مطالعه ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی است. کیهان ما در ابعاد بزرگ از کهکشان ها، گروه های کهکشانی، خوشه های کهکشانی و نواحی کم چگال به نام تهی جاها تشکیل شده است. نظریه تشکیل ساختار کیهانی به عنوان بخشی از کیهان شناسی دو هدف دارد. الف) بررسی منشا این ساختار های کیهانی و اختلالات اولیه کیهانی ب)نحوه رشد و تحول اختلالات اولیه کیهانی که منجر به وجود آمدن ساختارها در کیهان شده است. بررسی این دو سوال اطلاعات ارزشمندی درباره مولفه های تشکیل دهنده کیهان و قوانین حاکم بر آن را در اختیار ما می گذارد.

در نمودار ۱ نقشه ای از ساختارهای کیهانی را مشاهده می کنید که توسط یکی از مساحی های اولیه ای که در دهه ۹۰ میلادی انجام شده است. هر نقطه از این مساحی نشانگر یک کهکشان است که مکان آن در صفحه دو بعدی آسمان با بعد و میل نشان داده شده است و فاصله شعاعی آن از ما با انتقال به سرخ مشخص می شود.

برای شروع بحث تشکیل ساختار در کیهان باید مشاهده پذیرها را دسته بندی کنیم...

با توجه به شکل ۱ می توان مشاهده کرد که کیهان در مقیاس های بزرگ (تقریبا از مرتبه $(L > ۱۰۰ Mpc)$ تقریبا همگن و همسانگرد است. به همین دلیل است که برای بررسی دینامیک کیهان در مقیاس های بزرگ می توان با فرض همگنی و همسانگردی (اصل کیهان شناخت) می توان از متریک فریدمن استفاده کرد و تنها کمیت های مورد علاقه سرعت انبساط کیهان $H = \dot{a}/a$ و شتاب انبساط کیهان $q = -\ddot{a}a/\dot{a}$ می باشد. در حالی که در مقیاس های کوچکتر، ناهمگنی و ناهمسانگردی به خاطر ساختارها مشهود است. برای بررسی اختلالات و میزان انحراف آن از حالت زمینه کمیت تباین چگالی را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\delta(x) = \frac{\rho(x) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \qquad (۱)$$

که $\bar{\rho}$ چگالی متوسط کیهان است و تباین چگالی برخلاف کمیت های پس زمینه تابعی از مکان است. همان طور که می دانید شاره کیهانی شامل ماده غیرنسبیتی (باریون ها و ماره تاریک)، ماده نسبیتی (فوتون ها و نوترینوها) است. تباین چگالی را می توان برای هریک از مولفه های کیهانی تعریف کرد.

برای ایجاد اختلال در شاره نسبیتی

۲ نظریه اختلالات کیهانی و تشکیل ساختار خطی

نظریه تشکیل ساختار کیهانی، نظریه ای درباره منشا اختلالات اولیه کیهانی، رشد و تحول آن ها و تبدیل آن ها به ساختار کیهانی (مانند خوشه های کهکشانی، گروه های کهکشانی و حود کهکشان ها) می باشد. برای بررسی تشکیل ساختار دو سوال اساسی مطرح می شود.
۱)ویژگی و منشا اختلالات کیهانی
۲)تحول این اختلالات در کیهان منبسط شونده.
برای بررسی رشد ساختارها در مقیاس های کوچک در مقایسه با افق کیهانی در هر زمان و با فرض غیرنسبیتی بودن شاره های کیهانی می توانیم از مکانیک نیوتنی استفاده کنیم. در صورتی که شاره کیهانی مورد بحث در مقیاس های قابل مقایسه با افق یا بزرگتر از آن باشد یا شاره نسبیتی (مانند فوتون ها) را بررسی کنیم باید از نسبیت عام استفاده کنیم.
از طرف دیگر تشکیل ساختارها را می توان در دو گستره خطی و غیرخطی بررسی کرد. در گستره خطی تباین چگالی که به صورت زیر تعریف می شود کوچکتر از واحد است.

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \qquad (۲)$$

که $\bar{\rho}$ چگالی زمینه است و تباین چگالی تابعی از مکان است. در گستره خطی می توان از نظریه اختلال استفاده کرد، در حالی که در گستره غیر خطی نیاز به نظریه های نیمه تحلیلی و همچنین شبیه سازی داریم.
نکته دیگر در مورد بررسی اختلالات کیهاین و تشکیل ساختار، استفاده از روش های آماری و مشاهده پذیرهای آماری مانند تابع دو نقطه ای، سه نقطه ای و ... است. در ادامه درباره ویژگی های آماری ساختارهای کیهانی خواهیم پرداخت. برای بحث های مربوط به تشکیل ساختار و نظریه اختلالی می توانید از مراجع زیر استفاده کنید. [؟]

۱.۲ نظریه اختلالات نیوتنی

در نظریه اختلالات نیوتنی به مطالعه سیال غیرنسبیتی با چگالی انرژی ρ و سرعت فیزیکی $\vec{u}$ در میدان گرانشی با پتانسیل گرانشی ϕ می پردازیم. در صورتی که طول پویش آزاد میانگین ذرات تشکیل دهنده سیال بسیار کوچکتر از طول ساختار مورد بررسی باشد. معادلات پیوستگی (پایستگی جرم)، اویلر (معادله حرکت) و پواسون (میدان گرانشی) به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}_r.\vec{u} = ۰, \qquad (۳)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{\vec{\nabla}_r P}{\rho} - \vec{\nabla}_r\phi, \qquad (۴)$$

$$\nabla_r^{۲}\phi = ۴\pi G\rho \qquad (۵)$$

که $\vec{r}$ مختصه فیزیکی است و P فشار سیال است. مشتق $\frac{D}{Dt}$ به صورت زیر به سرعت سیال بستگی دارد:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}_r, \qquad (۶)$$

معادلات پیوستگی و اویلر و پواسون شامل ۵ معادله برای ۶ پارامتر آزاد مسله ρ،P، u_x، u_y، u_z و ϕ است. معادله دیگری که برای حل این سیستم احتیاج است معادله حالت سیال در درست بررسی است $p = p(\rho)$. در روابط بالا از طول فیزیکی $\vec{r}$ استفاده شده است که در کیهان منبسط شونده می توان بر حسب فاصله همراه χ و عامل مقیاس نوشت:

$$\vec{r} = a\vec{\chi} \tag{۷}$$

حال سرعت فیزیکی سیال را برابر خواهد بود با:

$$\vec{u} = \dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{\chi} + \vec{v} = H(t)\vec{r} + \vec{v} \tag{۸}$$

که $\vec{v} = a\dot{\chi}$ سرعت خاصه سیال است و پارامتر هابل عبارت است از $H = \dot{a}/a$. . مشتق نسبت به زمان مختصاتی است. رابطه (۸)نشان می دهد که در برای یک سیال کیهانی در زمینه منبسط شونده، سرعت دارای دو مولفه سرعت هابلی (به خاطر انبساط کیهان) و سرعت خاصه (به خاطر میدان گرانشی محلی است). این بدین معنی است که اگز کهکشان دوردستی را در یک گروه کهکشانی رصد می کنیم. این کهکشان با سرعت هابلی از ما دور می شود ولی به دلیل نیروی گرانشی حاصل از گروه کهکشانی دارای سرعت خاصه به سمت مرکز گرانشی گروه دارد که می واند در جهت سرعت هابلی نباشد.

در روابط (۳)،(۴) و (۵) مشتقات مکانی نسبت به طول فیزیکی و مشتق زمانی در طول فیزیک ثابت محاسبه شده است. حال می خواهیم معادلات را نسبت به مشاهده گر همراه بنویسیم.

$$\vec{\nabla}_r \rightarrow \frac{۱}{a}\vec{\nabla}_\chi \tag{۹}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|_r \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}|_\chi - \frac{\dot{a}}{a}\vec{\chi}.\vec{\nabla}_\chi \tag{۱۰}$$

۲.۲ نظریه اختلالات نسبیت عامی

تحول تباین چگالی و سرعت اختلالی مولفه های کیهانی را می توان از اختلالات معادلات اینشتین به دست آورد. معادلات اینشتین که هندسه را به تانسور-انرژی تکانه مولفه های کیهانی نسبت می دهد در هر مرحله ای از اختلال می توان استفاده کرد.

$$G_{\mu\nu} = R_\mu - \frac{۱}{۲}g_{\mu\nu}R = ۸\pi G T_{\mu\nu} \tag{۱۱}$$

که $g_{\mu\nu}$ متریک فضا-زمان $R_{\mu\nu}$ و R به ترتیب انسور ریمان و اسکالر ریچی به دست آمده از متریک فضا-زمان و $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه مولفه های تشکیل دهنده کیهان است. حال برای متریک فریدمن-رابرتسون-واکر

$$ds^۲ = -dt^۲ + a^۲(t)d\vec{x}^۲, \tag{۱۲}$$

معادلات زمینه، معادلات فریدمن خواهد بود

$$H^۲ = \frac{۸\pi G}{۳}\rho \tag{۱۳}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{۴\pi G}{۳}(\rho + ۳p) \tag{۱۴}$$

حال معادلات اختلالی در معادله مختل شده اینشتین صدق می کند:

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu} \tag{15}$$

در این مرتبه باید متریک مختل شده و تانسور انرژی-تکانه مختل شده را در رابطه ۱۵ قرار دهیم. درجات آزادی تانسور اینشتین $G_{\mu\nu}$ ۱۰ تا است. از آن جایی که تحت انتقال در مکان و زمان معادلات اختلالی نباید تغییر کنند ۶ درجه آزادی باقی می ماند. این ۶ درجه شامل دو درحجه آزادی اسکالر، ۲ درجه آزادی برداری و دو درجه آزادی تانسوری می باشد. در بخش بعد درباره درجات آزادی و پیمانه های متفاوت بحث خواهیم کرد. در این مرحله در پیمانه نیوتنی با دو درجه آزادی اسکالر متریک مختل شده را به صورت زیر می نویسیم.

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1 + 2\Psi(\vec{x},t))d\eta^2 + (1 - 2\Phi(\vec{x},t))d\vec{x}^2], \tag{16}$$

که η زمان همرا است که ارتباط آن با زمان مختصاتی با عامل مقیاس داده می شود $dt = a(t)d\eta$، Ψ و Φ دو درجه آزادی اسکالر در قسمت زمان-زمان و فضا-فضا متریک هستند. ارتباط بین این دو پتانسیل توسط معادلات اینشتین مختل شده داده می شود. در حد نیوتونی Ψ معادل پتانسیل گرانشی است. قسمت مختل شده متریک را با $\delta g_{\mu\nu}$ نشان دهیم به طوری که $g_{\mu\nu} = g^{\circ}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ و $g^{\circ}_{\mu\nu}$ متریک فریدمن -رابرتسون -واکر است.

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -2\Psi & 0 \\ 0 & -2\Phi \end{pmatrix}$$

حال هدف به دست آوردن تانسور اینشتین مختل شده است. از این رو باید متریک مختل شده پادوردا، نماد کرستوفر مختل شده، تانسور ریمان و اسکالر ریچی مختل شده را به دست آوردیم. از رابطه $g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}$ خواهیم داشت:

$$\delta g^{\mu\nu} = -\delta g_{\alpha\beta} g^{(0)\alpha\mu} g^{(0)\beta\nu} \tag{17}$$

حال نماد کرستوفر مختل شده برابر خواهد بود با:

$$\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\delta g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) + \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\delta g_{\alpha\nu,\lambda} + \delta g_{\alpha\lambda,\nu} - \delta g_{\nu\lambda,\alpha}), \tag{18}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}, \tag{19}$$

۳.۲ شاره چند مولفه ای

سیال کیهانی را با اختلال چگالی $\delta\rho$، اختلال فشار δp و دیورژانس سرعت θ بدون تانسور ناهمسانگردی در نظر بگیرید. پایستگی تانسور انرژی-تکانه $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ معادلات پیوستگی و اویلر را به صورت زیر به دست می دهند:

$$\frac{\dot{\delta}}{1+\omega} = -\theta + 3\dot{\Phi} - 3\mathcal{H}(\frac{\delta p}{\delta\rho} - \omega)\frac{\delta}{1+\omega} \tag{20}$$

$$\dot{\theta} = -\mathcal{H}(1 - 3\omega)\theta - \frac{\dot{\omega}}{1+\omega}\theta + \frac{\delta p}{\delta\rho}\vec{k}^2\frac{\delta}{1+\omega} + k^2\Psi \tag{21}$$

که در این بخش . مشتق نسبت به زمان همراه $d\eta = dt/a$ می باشد، $\mathcal{H}$ پارامتر هابل همراه $(\mathcal{H} = aH)$، $\omega \equiv P/\rho$ معادله حالت سیال δ تباین چگالی و θ دیورژانس سرعت است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\rho + P)\theta \equiv ik^j \delta T^{\circ}_j \tag{22}$$

سرعت صوت موثر (دستگاه همراه سیال) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{\delta p}{\rho} = c_s^2\delta + 3\mathcal{H}(1+\omega)(c_s^2 - c_a^2)\frac{\theta}{k^2} \tag{۲۳}$$

که c_a سرعت بی دررو سیال است که بستگی به معادله حالت سیال به شکل زیر دارد:

$$c_a^2 \equiv \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} = \omega - \frac{1}{3\mathcal{H}}\frac{\dot{\omega}}{1+\omega} \tag{۲۴}$$

با جایگذاری رابطه ۲۳ در پیوستگی و اویلر خواهیم داشت:

$$\frac{\dot{\delta}}{1+\omega} = 3\mathcal{H}(\omega - c_s^2)\frac{\delta}{1+\omega} - [k^2 + 9\mathcal{H}(c_s^2 - c_a^2)]\frac{\theta}{k^2} + 3\dot{\Phi}, \tag{۲۵}$$

$$\frac{\dot{\theta}}{k^2} = (3c_s^2 - 1)\mathcal{H}\frac{\theta}{k^2} + c_s^2\frac{\delta}{1+\omega} + \Psi \tag{۲۶}$$

حال سیالی را در نظر بگیرید که سرعت انتروپی صفر داشته باشد. ($C_s = c_a$) به معنای دیگر تحول سیال بی درو باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\dot{\delta}}{1+\omega} = 3\mathcal{H}(\omega - c_s^2)\frac{\delta}{1+\omega} - \theta + 3\dot{\Phi}, \tag{۲۷}$$

$$\frac{\dot{\theta}}{k^2} = (3c_s^2 - 1)\mathcal{H}\frac{\theta}{k^2} + c_s^2\frac{\delta}{1+\omega} + \Psi \tag{۲۸}$$

حال برای به دست آوردن تحول تباین چگالی δ از معادله (۲۷) یکبار نسبت به زمان همراه مشتق می گیریم و $\dot{\theta}$ را از رابطه (۲۸) جایگذاری می کنیم.

$$\ddot{\delta} = 3\dot{\mathcal{H}}(\omega - c_s^2)\delta + 3\mathcal{H}(\dot{\omega} - \dot{c_s^2})\delta + 3\mathcal{H}(\omega - c_s^2)\dot{\delta} - (3c_s^2 - 1)\mathcal{H}(1+\omega)\theta - c_s^2k^2\delta - (1+\omega)k^2\Psi - \dot{\omega}\theta + 3\dot{\omega}\dot{\Phi} + 3(1+\omega)\ddot{\Phi}, \tag{۲۹}$$

حال با جایگذاری θ از رابطه (۲۷) در (۲۹) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}\ddot{\delta} &+ \left[(1 - 3c_s^2)\mathcal{H} - 3\mathcal{H}(\omega - c_s^2) - \frac{\dot{\omega}}{1+\omega}\right]\dot{\delta} \\ &+ \left[-3\dot{\mathcal{H}}(\omega - c_s^2) - 3\mathcal{H}(\dot{\omega} - \dot{(c_s^2)}) + 3\mathcal{H}(\omega - c_s^2)\frac{\dot{\omega}}{1+\omega} + 3(3c_s^2 - 1)\mathcal{H}^2(\omega - c_s^2) + k^2c_s^2\right]\delta \\ &+ (1+\omega)[k^2\Psi + 3\mathcal{H}(3c_s^2 - 1)\dot{\Phi} - 3\ddot{\Phi}] = 0\end{aligned} \tag{۳۰}$$

۴.۲ طیف توان ماده و طیف توان اختلالات انحنا

برای ارتباط اختلالات ماده با اختلالات اولیه در انحنا از معادله پواسون استفاده می کنیم:

$$k^2\Phi = 4\pi Ga^2\rho_m\delta_m, \tag{۳۱}$$

که Φ پتانسیل گرانشی (در پیمانه نیوتنی برابر با پتانسبل اختلال است) و δ_m تباین چگالی ماده تاریک است. معادله پواسون را می توان بر حسب ارامتر هابل در زمان حال و پارامتر چگالی ماده تاریک به صورت زیر نوشت:

$$k^{2}\Phi=\frac{3}{2}H_{0}^{2}\Omega_{m}^{0}\delta_{m}(1+z) \tag{32}$$

حال می توان پتانسیل گرانشی را برحسب مقدار اولیه آن نوشت. برای این کار از تابع انتقال $T(k)$ و تابع رشد $D(z)$ استفاده می کنیم.

$$\Phi(k,z)=\frac{9}{10}T(k)D(z)(1+z)\Phi_{ini} \tag{33}$$

که Φ_{ini} پتانسیل اولیه است که در دوران تابش غالب برابر است با $\phi_{ini}=2/3\mathcal{R}$ در نتیجه با جایگذاری در معادله پواسون خواهیم داشت:

$$\frac{2}{5}k^{2}T(k)D(z)\mathcal{R}=H_{0}^{2}\Omega_{m}^{0}\delta_{m} \tag{34}$$

در نتیجه

$$\mathcal{R}=\mathcal{M}(k,z)\delta_{m}, \tag{35}$$

که $\mathcal{M}$ تابع انتقال انحنا به تباین چگالی ماده است:

$$\mathcal{M}(k,z)=\frac{5H_{0}^{2}\Omega_{m}^{0}}{2k^{2}T(k)D(z)}, \tag{36}$$

حال طیف توان ماده $P_m(k,z)=\delta_m^2$ به صورت زیر به دست می آید:

$$P_{m}(k,z)=\frac{4}{25}\frac{k^{4}}{(\Omega_{m}^{0})^{2}H_{0}^{4}}P_{\mathcal{R}}T^{2}(k)D^{2}(z) \tag{37}$$

که $P_{\mathcal{R}}$ طیف توان انحنا است که می توان طیف توان بی بعد انحنا را که به صورت زیر تعریف می شود و با داده های تابش پس زمینه مقید می شود نوشت:

$$\Delta_{\mathcal{R}}=\frac{1}{2\pi^{2}}k^{3}P_{\mathcal{R}}=A_{inf}(\frac{k}{k_{p}})^{n_{s}-1}, \tag{38}$$

که تساوی دوم توان اختلالات انحنا را پارامتریزه کرده است. A_{inf} توان اختلالات در عدد موج پایه (که برای ماهواره پلانک $k_p=0.05Mpc^{-1}$ است)(و n_s عدد نمایه است و بستگی اختلالات به مقیاس را به دست می دهد. با جایگذاری طیف توان بدون بعد در طیف توان ماده و با پارامتریزاسیون فوق خواهیم داشت:

$$P_{m}(k,z)=Ak^{n_{s}}T^{2}(k)D^{2}(z) \tag{39}$$

که ضریب نرمالیزاسیون A به صورت زیر به دامنه اختلالات عدد نمایه و پارامتر چگالی ماده تاریک ربط دارد:

$$A=\frac{4}{25}2\pi^{2}A_{inf}k_{p}^{1-n_{s}}\Omega_{m}^{-2}H_{0}^{-4} \tag{40}$$

که $A_{inf}=2.23\times10^{-9}$ و $n_s=0.96$ و $h=0.674$در این صورت $A=$

۳ اعوجاج فضای فاز

موقعیت اجرام در آسمان با دو مختصه θ و ϕ در صفحه دو بعدی داده می شود و همچنین فاصله جرم آسمانی مانند کهکشان با انتقال به سرخ z اندازه گیری می شود. در نگاشت مختصه (θ, ϕ, z) به فضای حقیقی باید توجه داشته باشیم که به خاطر اثرات سرعت خاصه (اثرات موضعی) انتقال به سرخ کیهانی نگاشت یکسانی با فواصل کیهانی ندارد و اثرات سرعت خاصه وارد می شود. این اثرات تحت عنوان اعوجاج فضای انتقال به سرخ شناخته شده اند.

در مقیاس های کوچکه به طور مثال کهکشان های داخل گروه کهکشانی و در قسمن مرکزی دارای سرعت های کاتوره ای هستند و آن چه مهم می شود سرعت خاصه در راستای دید است که باعث کشیده شده خوشه در راستای دید می شود که به این اثر، اثر انگشت خدا می گویند. حال فرض کنید که کهکشانی در فاصله $\vec{r}$ با سرعت خاصه $\vec{v}$ و جود داشته باشد. درد متیجه سرعت در راستای دید را که با $u(r)$ نشان می دهیم برابر خواهد بود:

$$u(r) \equiv \vec{v}.\frac{\vec{r}}{r} \tag{۴۱}$$

که $r = |\vec{r}|$. حال اگر سرعت ها را به پارامتر هابل در زمان حال تقسیم کنیم، سرعت ها از جنس Mpc خواهند بود و تغییرات دستگاه مختصات را از فضای حقیقی r به فضای انتقال به سرخ s به صورت زیر تعیین می شود:

$$\vec{s} = \vec{r}\left(۱ + \frac{u(r) - u(۰)}{r}\right), \tag{۴۲}$$

حال فرض کنید که dV_r و dV_s حجم فضای حقیقی و انتقال به سرخ باشد و اگر $n(r)$ و $n(s)$ به ترتیب چگالی عددی باشند آن گاه خواهیم داشت:

$$n(r)dV_r = n(s)dV_s \tag{۴۳}$$

حجم فضای انتقال به سرخ برابر است با:

$$dV_s = \left(۱ + \frac{\Delta u(r)}{r}\right)^۲ |J|r^۲ \sin^۲\theta dr d\theta d\phi = \left(۱ + \frac{\Delta u(r)}{r}\right)^۲ |J| dV_r \tag{۴۴}$$

که $|J|$ ژاکوبی تبدیل است که برابر:

$$|J| \equiv |\frac{\partial s}{\partial r}| = ۱ + \frac{du}{dr} \tag{۴۵}$$

حال تباین چگالی را در فضای انتقال به سرخ δ_s اندازه گیری می کنیم:

$$\delta_s = \frac{n(s)dV_s}{n_۰ dV_s} - ۱ = \frac{n(r)dV_r}{n_۰ dV_s} - ۱ \tag{۴۶}$$

که $n_۰$ چگالی عددی زمینه است. حال اگر به جای dV_s در مخرج کسر رابطه ۴۶ از رابطه ۴۴ جایگذاری کنیم:

$$\delta_s = \frac{n(r)}{n_۰(۱ + \frac{\Delta u}{r})^۲(۱ + \frac{du}{dr})} - ۱, \tag{۴۷}$$

حال تا مرتبه یک اختلال خواهیم داشت:

$$\delta_s \simeq \frac{n(r)}{n_\circ}\left(۱ - ۲\frac{\Delta u(r)}{r} - \frac{du}{dr}\right) - ۱ \qquad (۴۸)$$

حال اگر تباین چگالی را در فضای حقیقی به صورت $\delta_r = n(r)/n_\circ - ۱$ تعریف کنیم خواهیم داشت:

$$\delta_s \simeq \delta_r - ۲\frac{\Delta u(r)}{r} - \frac{du}{dr} \qquad (۴۹)$$

این بدین معنا است که تباین چگالی محاسبه شده در فضای فوریه با چگالی در فضای حقیقی متفاوت است و این بدین معنی است که طیف توان و یا تابع دو نقطه ای استخراجی آن ها متفاوت خواهد بود. برای به دست آوردن این تفاوت باید سرعت خاصه ساختارها را از تشکیل ساختار خطی به دست آوریم. در فضای فوریه معادله پایستگی برابر است با

$$\delta'_k = -ik_i v^i \qquad (۵۰)$$

در گستره نیوتنی و با این فرض که فقط اختلالات اسکالر را بررسی می کنیم (بدین معنا که سرعت را به صورت گرادیان میدان اسکالر) هم جهت k می توان نوشت در گستره خطی خواهیم داشت:

$$v^i = i\mathcal{H}f\delta_k\frac{k^i}{k^۲} \qquad (۵۱)$$

که f آهنگ رشد ساختاره است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$f = \frac{d\ln\delta_m}{d\ln a} \qquad (۵۲)$$

اگر سرعت خاصه را در کیهان محلی در نظر بگیریم $\mathcal{H} = H_\circ$ و $a = a_\circ = ۱$ سرعت خاصه برابر خواهد بود با:

$$\vec{v} = iH_\circ f\delta_k\frac{\vec{k}}{k^۲} \qquad (۵۳)$$

حال نکته بسیار مهم این است که کمیتی که در رصد اندازه گیری می کنیم تباین چگالی کهکشان ها δ_g است که با پارامتر سویدگی (بایاس) b که در حالت کلی می تواند تابعی از انتقال به سرخ و مقیاس (و حتی ارامترهای محیطی) باشدبه تباین چگالی ماده تاریک بستگی دارد:

$$\delta_g = b\delta_m \qquad (۵۴)$$

حال اگر پارامتر β را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\beta \equiv \frac{f}{b} \qquad (۵۵)$$

سرعت خاصه حقیقی به تباین چگالی کهکشان در فضای فوریه و پارامتر اعوجاج β به صورت زیر مرتبط است:

$$\vec{v} = iH_\circ\beta\int\delta_g(k)e^{ikr}\frac{\vec{k}}{k^۲}d^۳k^* \qquad (۵۶)$$

که k^* ضریب فوریه $V/(2\pi)^3$ را در خود دارد. حال می توان سرعت در راستای دید را در واحد Mpc محاسبه کرد ($H_0 = 1$)

$$u(r) = i\beta \int \delta_{g(r)}(k) e^{i\vec{k}.\vec{r}} \frac{\vec{k}.\vec{r}}{k^2 r} d^3 k^* \tag{57}$$

حال مشتق سرعت در راستای دید برابر خواهد بود با:

$$\frac{du}{dr} = -\beta \int \delta_{g(r)}(k) e^{i\vec{k}.\vec{r}} (\frac{\vec{k}.\vec{r}}{kr})^2 d^3 k^* \tag{58}$$

حال برای فاصله های زیاد می توان از ترم دوم سرعت خاصه صرف نظر کنیم:

$$\delta_s = \delta_r - \frac{du}{dr} = \delta_r + \beta \int \delta_{g(r)}(k) e^{i\vec{k}.\vec{r}} (\frac{\vec{k}.\vec{r}}{kr})^2 d^3 k^*, \tag{59}$$

حال با ضرب طرفین در $V^{-1} e^{-ik'.r} d^3 r$ و انتگرال گیری می توان تباین چگالی ررا در فضای فوریه محاسبه کرد:

$$\delta_{sk} = \delta_{rk} + \beta \frac{1}{(2\pi)^3} \int\int d^3 r d^3 k' \delta_{rk'} e^{i(\vec{k}'-\vec{k}).\vec{r}} (\frac{\vec{k}'.\vec{r}}{k'r})^2 \tag{60}$$

که این انتگرال را به صورت زیر نوشته می شود:

$$\delta_{sk} = \delta_{rk} + \beta \int \delta_{rk'} I(k,k') d^3 k' \tag{61}$$

که

$$I(k,k') = (2\pi)^{-3} \int e^{i(\vec{k}'-\vec{k}).\vec{r}} (\frac{\vec{k}'.\vec{r}}{k'r})^2 d^3 r \tag{62}$$

که این اثر اعوجاج فضای فاز باعث ترکیب مدها می شود. اگر کسینوس زاویه بین جهت دید کهکشان و مد فوریه را μ تعریف کنیم:

$$\mu \equiv \frac{\vec{k}.\vec{r}}{kr} \tag{63}$$

اگر μ در زاویه فضایی محدودی باشد بدین معنا که مساحی زاویه کوچکی داشته باشد، این کمیت را می توان ثابت در نظر گرفت . به معنا دیگر تابع جفتیدگی مدها $I(k,k')$ برابر خواهد بود:

$$I(k,k') = \mu^2 \delta_D(\vec{k} - \vec{k}'), \tag{64}$$

در نتیجه

$$\delta_{sk} = \delta_{rk}(1 + \beta\mu^2) \tag{65}$$

حال طیف توان برابر خواهد بود با:

$$P_s(\vec{k}) = P_{\vec{r}}(1 + \beta\mu^2)^2 \tag{66}$$

حال اگر حول زوایا میان گیری کنیم خواهیم داشت:

$$P_s(k) = P_r(k) \left(1 + 2\beta\langle\mu^2\rangle + \beta^2 \langle\mu^4\rangle\right) \tag{67}$$

در نتیجه

$$P_s(k) = P_r(k) \left(1 + 2\beta/3 + \beta^2/5\right) \tag{68}$$

۴ تشکیل ساختار غیرخطی