Special relativity

Problem Set 5

Problem 1

تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی، $F_{\mu\nu}$، به صورت زیر برحسب چهاربردار پتانسیل الکترومغناطیسی، A^{μ}، تعریف می‌شود.

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

الف با استفاده از اتحاد زیر، چهار معادله‌ی الکترومغناطیسی ماکسول را بدست آورید.

$$F_{\alpha\mu,\nu} + F_{\mu\nu,\alpha} + F_{\nu\alpha,\mu} = 0$$

ب کمیت‌های $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ و $det(F_{\mu\nu})$ را برحسب میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بازنویسی کنید و درباره‌ی معنای فیزیکی این کمیت‌ها بحث کنید.

ج کمیت‌های قسمت قبل را برای موج تخت الکترومغناطیسی آزاد محاسبه کرده و معنای فیزیکی آن را توضیح دهید.

(اول با استفاده از گیج لورنز، $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$، رابطه‌ای برای چهاربردار پتانسیل، A^{μ}، بدست آورید و آن را حل کنید. سپس کمیت‌های خواسته شده را بدست آورید.)

ه با استفاده از پتانسیلی که در قسمت قبل بدست آوردید، نشان دهید که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر راستای انتشار موج عمود هستند.

Problem 2

می‌دانیم که در دستگاه سکون یک محیط رسانا، چگالی جریان در قانون اهم، $\vec{J}' = \sigma\vec{E}'$، صدق می‌کند. که σ رسانندگی الکتریکی است.
(پریم نشان‌دهنده‌ی متغیر در دستگاه سکون است)

الف صدق رابطه‌ی زیر را نشان دهید. همچنین K یک ضریب ثابت است که باید آن را به صورت صریح برحسب رسانندگی بدست آورید.

$$J^\alpha - \frac{1}{c^2}(U_\beta J^\beta)U^\alpha = KF^{\alpha\beta}U_\beta$$

ب نشان دهید که اگر محیط مذکور با سرعت $\vec{v} = \vec{\beta}c$ حرکت کند، داریم:

$$\vec{J} = \gamma\sigma[\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B} - \vec{\beta}(\vec{\beta}.\vec{E})] + \rho\vec{v}$$

Problem 3

فرض کنید جریان I از طریق یک سیم رسانای مستقیم بدون بار عبور می‌کند. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را نسبت به دستگاه لخت S' که با سرعت v، موازی سیم رسانا حرکت می‌کند را به دو روش خواسته شده بدست آورید.

الف با تبدیل تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی، از دستگاه سکون سیم، S، به دستگاه لخت متحرک نسبت به سیم (S').

ب با تبدیل چهار بردار جریان- چگالی، J^μ، از دستگاه S به دستگاه S'.

Problem 4

یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی ایده‌آل m در مبدا یک دستگاه لخت S' که با سرعت v در راستای محور x نسبت به دستگاه لخت S حرکت می‌کند، قرار دارد. پتانسیل برداری در دستگاه S' برابر است با:

$$\vec{A}' = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}' \times \vec{\hat{r}}'}{r'^2}$$

و پتانسیل الکتریکی ϕ' صفر است.
فرض کنید که $\vec{R}$، بردار مکان از موقعیت آنی دوقطبی (در زمان مشاهده) تا نقطه‌ی مشاهده است و زاویه‌ی میان $\vec{R}$ و محور مثبت x، θ است.

الف پتانسیل اسکالر ϕ را در دستگاه S بیابید.

ب نشان دهید که در حد غیرنسبیتی پتانسیل اسکالر بدست آمده با پتانسیل الکتریکی ایده‌آل برابر است و بردار دوقطبی الکتریکی متناظر با آن برابر است با:

$$\vec{p} = \frac{\vec{v} \times \vec{m}}{c^2}$$

Problem 5

از محتوای کلاس، چه بخشی برای شما مبهم و نامفهوم یا سخت بوده است؟ در صورت تمایل می‌توانید اگر نظر یا پاسخ پیشنهادی هم داشتید؛ بنویسید. اما صرفا نوشتن یک سوال واضح کفایت می‌کند.
(این بخش به دستیاران آموزشی کمک می‌کند تا بهتر متوجه شوند که کدام مباحث برای شما مبهم‌تر یا دشوارتر بوده؛ تا در صورت نیاز در کلاس‌های حل تمرین بیشتر به آن‌ها پرداخته شود. لطفا سوالی را بنویسید که واقعا برای‌تان ابهام داشته؛ نه فقط یک سوال ساده برای انجام تکلیف.)

Henceforth space by itself, and time by itself,
Are doomed to fade away into mere shadows.
Hermann Minkowski