نسبیت عام نیمسال دوم سال تحصیلی 98/99 ≈ اردیبهشت 1399

ثابت کیهان‌شناسی قسمت II

در جلسه قبل، درس نامه را با این مشاهده مهم به اتمام رساندیم که شواهد اخیر حاکی از نوعی I
چیز یا نیرویی را دارند که انبساط کیهان را تندشونده کرده است.

این بدین معنا است که معادله فریدمن برای کیهان را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$(1)\qquad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P),\quad \ddot{a} > 0 \Rightarrow \rho + 3P < 0$$

$$w = \frac{P}{\rho} < -\frac{1}{3}$$

نیز سیالی که کیهان از نظر تانسور انرژی-تکانه غالب است که فشار منفی دارد و معادله حالت آن کوچکتر از $-\frac{1}{3}$ باشد.

در این جا شاید شگفت‌زده شوید! این انرژی چیست؟!

برای تعیین این فرض باید مقدار چگالی انرژی مورد نیاز انبساط تندشونده کیهان را محاسبه کنیم.

در این راستا از معادله اول فریدمن استفاده می‌کنیم.

$$(2)\qquad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \xrightarrow{\text{کنونی}} H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{DE}$$

توجه داشته باشید که زیرنویس ρ یا DE به نام انرژی تاریک گذاشتیم

2,

این واژه‌ای است که کیهان‌شناسان برای حاصل انبساط تندشونده کیهان گذاشته‌اند.

در این قسمت از ρ_{VOC} یا ρ_{Λ} استفاده نکرده‌ام.

- حال مقدار تقریبی ρ_{DE} را می‌خواهیم. از رابطه (2) داریم.

$$\rho_{DE} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \frac{3 \times (70\ km/s/Mpc)^2}{8\pi \times 6.67 \times 10^{-11}\ kg^{-1} m^3 s^{-2}} \quad (3)$$

↓ جایگذاری

توجه داشته باشید که مخرج ρ_{DE} یک کمیت آزمایشی دارد، آن H_0 است. تبدیل این کمیت را با نگاه کردن به آسمان به دست آورده‌ایم. حال با توجه به ارتباط بین Mpc, km داریم.

$$1\ Mpc = 10^6\ pc \cong 10^6 \times 3.1 \times 10^{13}\ km = 3.1 \times 10^{19}\ km \quad (4)$$

در نتیجه

$$\rho_{DE} \cong \frac{3 \times 4.9 \times \frac{1}{3.1^2}}{8\pi \times 6.67} \times 10^3 \times 10^{-38} \times 10^{11}\ kg/m^3 \quad (5)$$

$$\cong 9.1 \times 10^{-27}\ kg/m^3 \simeq 10\ proton/m^3$$

بنابراین

بنابراین حالب است که کمیت فوق تقریباً حجمی کیهان است نه دیگر مقیاس به 10^{-27}

نکته شاهدانی دیگر این است که داده ها ی تجربی نشان می دهند سهم انرژی تاریک از حجمی کل 70٪ است. به بیان دیگر کیهان در حال حاضر انرژی تاریک غالب است.

حال انرژی فوق را بر حسب Gev^4 می سنجیم.

$$\rho_{DE} = \frac{3.8 \text{ proton}}{1 \text{ meter}^3} \quad (6)$$

حال دو واحد های طبیعی را داریم که مقابل طول عکس انرژی است

بدین ترتیب که

$$10^{-15} \text{ meter} \Leftrightarrow (1 \text{ GeV})^{-1} \quad (7)$$

طول عکس انرژی

$$1 \text{ meter} \Leftrightarrow (10^{-15} \text{ GeV})^{-1}$$

$$\rho_{DE} = 3.8 \times 1 \text{ GeV} \times 10^{-45} \times \text{GeV}^3 \sim 10^{-45} \text{ Gev}^4 \quad (8)$$

بسیار جالب! این چگالی انرژی تاریک است! چقدر کوچک!

حال این کمیت را با انرژی خلاء مقایسه کنید.

$$\frac{\rho_{DE}}{\rho_{VAC}} = \frac{10^{-45} \text{ Gev}^4}{10^{74} \text{ Gev}^4} \simeq 10^{-120} ! \quad (9)$$

4/ مسئله ثابت کیهان‌شناسی یا انرژی خلاء، انرژی تاریک نسبیت! به این مسئله، مسئله

"New Cosmological Constant Problem" جدید می‌گویند.

بیان این مسئله به این صورت است. به جای این که چرا تانسور انرژی-تکانه خلاء اثر گرانشی ندارد،

یا چرا ρ^{vac} صفر است، تبدیل شده است به این مسئله که چرا انرژی خلاء

به این اندازه کوچک است یا چرا این اندازه کوچک اثرات گرانشی دارد؟

این مسئله جدید فیزیک نظری، نظایر بسیار از نسبت عام، پیدا شده است!

" The worst theoretical prediction in the history of physic ".

حال فرض کنید به این مسئله به گونه‌ای دیگر نگاه کنیم.

اگر اکنون دینامیک را فعلا حفظ کنیم می‌توانیم بنویسیم

به صورت زیر بنویسیم.

metric compatibility

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^{\mu}\left(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\right) = 0 \tag{10}$$

به بیان دیگر می‌توان گفت ترم ثابت کیهان‌شناسی Λ را به تانسور انیشتین اضافه کنیم

G_{geom}

به فضای دیگر معادلات انیشتین و کنش انیشتین هیلبرت را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (11)$$

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \, (R - 2\Lambda) + S_m \quad (12)$$

حال Λ می‌تواند نمایانگر انرژی خلاء، ثابت هندسی، یا انرژی تاریک باشد. اگر فرض کنیم هر دو تم انرژی خلاء و ثابت هندسی وجود داشته باشد در این صورت

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + (\Lambda_{geo} + \Lambda_{vac}) g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (13)$$

در حالی که رصدهای کیهان شناسی اشاره دارند

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda_{DE} g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (14)$$

شاید این مدل بهتر است که

$$\Lambda_{DE} = \Lambda_{geo} + \Lambda_{vac} \quad (15)$$

و این بستگی به ثابت کیهان شناسی جدید را تبدیل به مسئله تنظیم ظریف $\frac{1}{10^{120}}$ با دقت Λ_{geo} می‌کند با این احتمال که fine tunning problem به گونه‌ای تنظیم شده که Λ_{vac} را به مقدار کوچک Λ_{DE} برساند!

6/

سؤال بعدی که می‌توان پرسید این است که آیا واقعاً عامل انبساط تندشونده ثابت کیهان‌شناسی است؟ زیرا داده‌های انبساط تندشونده نیز $w < -\frac{1}{3}$ دارد. آیا واقعاً $w = -1$ (معادل ثابت کیهان‌شناسی) است.

این یکی از بزرگترین سؤالات کیهان‌شناسی است. رصدهای مهم تلاش زیادی کیهان و ساختارهای بزرگ‌مقیاس سعی در جواب به این سؤال داشته‌اند داده‌های رصدی توافق خوبی با $w = -1$ دارند.

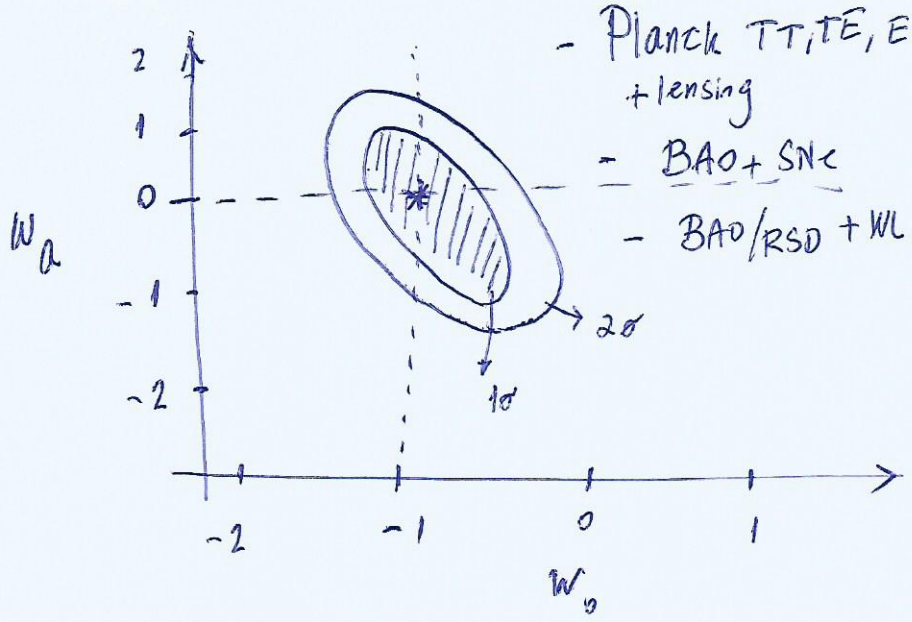
Chevallier, M ; Polarski D (2001) IJMPD. 10 (2) : 213

Linder, Eric V. (2003), Physical Review Letters 90 (9)

پیشنهاد کردند که به صورت پیوسته‌ای معادله حالت انرژی تاریک را به صورت زیر در نظر گیریم.

$$w_{DE} = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}, \qquad (16)$$

که w_0 ، w_a پارامترهای آزاد، z انتقال به سرخ کیهانی باشد. در صورتی که $w_0 = -1$ ، $w_a = 0$ باشد ثابت کیهان‌شناسی عامل انبساط تندشونده است نتایج رصدی به صورت زیر است.



شکل ۱

Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters 1807.06209

مشاهدات رصدی نشان می دهند که ثابت کیهان شناسی می تواند عامل انبساط شتابنده کیهان باشد.

نکته: مدل های بسیاری برای توضیح عامل انبساط شتابنده جهان پیشنهاد شده است به طور مثال:

a) مدل های انرژی تاریک:

توجه داشته باشید که این دسته از پیشنهادها را مدل های انرژی تاریک در تقابل ثابت کیهان شناسی می نامند و در ادبیات استفاده می شود.

کوپلینگ: وجود میدان اسکالر

(17)
$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R + \mathcal{L}_\phi \right] + S_M$$

که $\kappa^2 \equiv 8\pi G$ ، لاگرانژی میدان اسکالر

(18)
$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)$$

8/ تانسور انرژی-تکانه میدان اسکالر به صورت زیر است

$$(19)\quad T_{\mu\nu}^{(\phi)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}}$$

$$= \partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\,\partial_\beta\phi + V(\phi)\right]$$

در نتیجه چگالی انرژی و چگالی فشار به صورت زیر تعریف می‌شود.

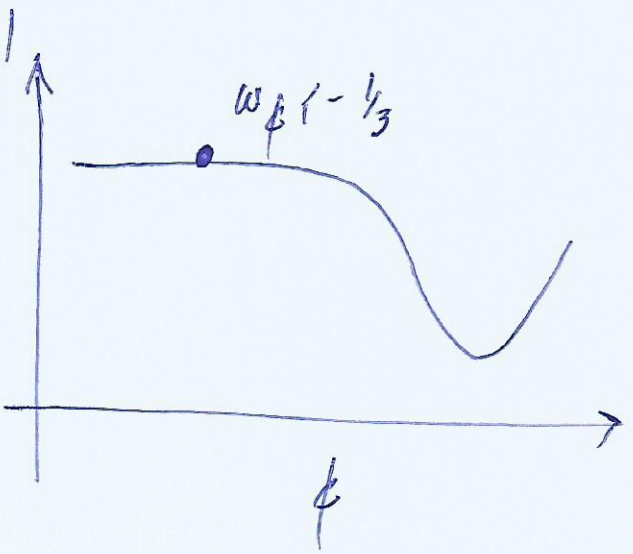
$$(20)\quad \rho_\phi = -T^{0}_{0}{}^{(\phi)} = \frac{1}{2}\dot{\phi} + V(\phi)$$

$$(21)\quad P_\phi = \frac{1}{3}T^{i}_{i}{}^{(\phi)} = \frac{1}{2}\dot{\phi} - V(\phi)$$

معادله حالت به صورت زیر خواهد بود.

$$(22)\quad w_\phi = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}$$

حال با انتخاب مناسب پتانسیل که شرط اخیر را دارد می‌توان معادله حالت $w_\phi(-1/3)$ را به دست آورد.



شکل:

9)

ایده دیگری که برای حل مسئله ثابت کیهان شناسی وجود دارد، ایده گرانش تغییر یافته است.

به این معنا گرانش را در حالت کلی تر نسبی به در نظر میگیریم.

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x \sqrt{-g}\, f(R) + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi_m) \quad (23)$$

که $\kappa^2 = 8\pi G$ ، Ψ_m نشانگر میدان های مادی است.

اگر گرانش فوق نسبت به تنزل عرضش تغییر کند معادله میدان برابر خواهد بود با

$$F(R) R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu} \Box F(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (24)$$

که

$$F(R) \equiv \frac{\partial f}{\partial R}$$

این معادله را به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2} f(R) \frac{g_{\mu\nu}}{F(R)} + \frac{1}{F}\left(\nabla_\mu \nabla_\nu F - g_{\mu\nu} \Box F\right) + \frac{\kappa^2}{F(R)} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (25)$$

که رابطه فوق را میتوان به صورت زیر بنویسیم.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{\kappa^2 T_{\mu\nu}}{F(R)} + T_{\mu\nu}^{dark} \quad (26)$$

10/ حال می‌توانیم $T_{\mu\nu}^{dark}$ را به صورت زیر تعریف کنیم.

(26) $$T_{\mu\nu}^{dark} = \frac{f(R) - FR}{2F} g_{\mu\nu} + \frac{1}{F}\left(\nabla_\mu \nabla_\nu F - g_{\mu\nu} \Box F\right)$$

که این تانسور تنش-انرژی کاملاً انرژی تاریک را دارد.

- مدل $f(R) = R - \alpha/R$ از اولین مدل‌های ترانش تعمیم یافته بوده است.

S.M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden & M. S. Turner
Phys. Rev. D 70 (2004), 043528

- مدل $f(R) = \sqrt{R^2 - R_0^2}$

S. Baghram, M. Farhang, S. Rahvar
Physical Rev. D. 75 (2007) 044024

- مدل $S = \int d^4x \sqrt{-g}\left[\frac{R + f(R)}{2\kappa^2}\right]$

W. Hu, I. Sawicki
Phys. Rev. D 76 (2007) 064004

(27) $$f(R) = -m^2 \frac{c_1 \left(R/m^2\right)^n}{c_2 \left(R/m^2\right)^n + 1} \qquad n > 0$$

همچنین می‌توانید به کتاب زیر مراجعه کنید.

Dark Energy, Theory & Observation
Luca Amendola, Shinji Tsujikawa
Cambridge University Press. (2010)

11, مسئله ثابت کیهان شناسی را به کل مخروان نیز می توان داد. ؟

1) چرا کیهان ما این اندازه بزرگ است ؟

$$\frac{\rho_{DE}}{\rho_{vac}} = \frac{3H_0^2/8\pi G}{\Lambda_{vac}/8\pi G} \simeq 3\,c^{-2}H_0^2/\Lambda_{vac} \simeq \left(\frac{l_{pl}}{l_{uni}}\right)^2$$

$$\simeq \left(\frac{10^{-35}\ m}{3\times10^{3}\times10^{6}\times3\times10^{16}\ m}\right)^2 \simeq 10^{-120}$$

بنابراین اندازه کیهان (افق) $l_{univ} \sim 3000\,h^{-1}\,Mpc$ است. اندازه 10^{120} برابر بزرگتر از طول پلانک l_p است.

$$l_{univ} \sim cH_0^{-1}$$

2) چرا کیهان ما این اندازه کهن است ؟

$$\frac{\rho_{DE}}{\rho_{vac}} = \frac{3H_0^2/8\pi G}{c^2\Lambda_{vac}/8\pi G} \simeq \left(\frac{t_{p0}}{t_{uni}}\right)^2$$

$$t_p \sim 10^{-43}\ s$$

$$t_{uni} \sim 14\ Gyr \sim 14\times10^{9}\times3\times10^{7} \simeq 10^{17}\ s$$

$$\rho_{DE}/\rho_{vac} \sim \left(\frac{10^{-43}\ sec}{10^{17}\ sec}\right)^2 = 10^{-120}$$

بنابراین دوباره کهن کیهان 10^{120} برابر بزرگتر از زمان پلانک است.

12/

مدل کیهان شناسی که به نام ΛCDM شناخته می‌شود به دلیل این نام‌گذاری است که کیهان شناسان عامل انبساط تندشونده کیهان را Λ ثابت کیهان شناسی می‌دانند CDM مخفف Cold Dark Matter است (ماده تاریک سرد)

نهم این مدل کیهان شناسی که شواهد رصدی 68٪ سهم Λ 28٪ سهم ماده تاریک سرد و 4٪ سهم مدل استاندارد ذرات است.

برای فهم و دقیت کردن مدل استاندارد کیهان شناسی

Phillip Jame Edwin (Jim) Peebles (1935-)

سهم از جایزه نوبل فیزیک 2019 را کسب کرد.

مدل استاندارد کیهان شناسی تطابق بسیار خوبی با داده های رصدی دارد و بجز چند مورد تنش tension خوبی با آزمایش سازگار است.

یکی از این تنش ها موجود به پارامترهای زیر است

H_0-tension

است این پارامتر یک پارامتر تابش زمینه کیهان (300,000 yr) بعد از مهبانگ

دقیق در زمان حال با استفاده از ابزار نوترینو I اندازه گیری شده است. آیا این اختلاف دارای

$H_0^{late} = 74.03 \pm 1.42$ km/s/Mpc $H_0^{early} = 67.4 \pm 0.5$ km/s/Mpc