۹۹/۱/۳۰

نسبیت عام - سمینار تحصیلی دوم سال ۹۹ ، ۹۸

در جلسه قبل معادله انیشتین را به روشی که انیشتین به دست آورده بود را نشان دادیم.

(1)
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G\, T_{\mu\nu}$$

حال سؤال این است که آیا می‌توانیم این معادله را از یک لاگرانژی به دست آوریم؟

خوب باید در فکر ساخت این لاگرانژی ansatz باشیم. لاگرانژی باید به صورت یک اسکالر باشد

و این اسکالر باید در برگیرنده مشتق میدان گرانشی (متریک $g_{\mu\nu}$) باشد.

بدین دلیل که مشتق دوم متریک به صورت کلی در خمینه دلخواه غیر صفر است. تانسور ریمان که

نشان دهنده خمش است شامل مشتقات دوم متریک است.

تنها اسکالری که از متریک و تانسور ریمان می‌شود ساخت، اسکالر ریچی است.

این پیشنهاد هیلبرت - Hilbert - است که ساده‌ترین اسکالر را در نظر بگیریم.

$$S_H = \int \sqrt{-g}\, d^n x\; R \qquad \text{Einstein-Hilbert action.}$$
(2)

توجه داشته باشید که جمله $\int \sqrt{-g}\, d^n x$ المان حجم قابل درک است. انتگرال را به صورت

تانسوری ساده نوشته شده است (مراجعه کنید به جلسه مربوط به بحث انتگرال در خمینه)

حال برای به دست آوردن معادله انیشتین، استفاده از معادله اویلر-لاگرانژ امکان پذیر نیست

چون لاگرانژی به شکل $\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i)$ نیست و میدان دارای مشتق هم مرتبه دوم متریک است.

2/

در نتیجه به شکل مستقیم می‌توانیم وردش متریک را محاسبه کنیم.

از آنجایی که

(3) $$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}\, g_{\nu\sigma}\, \delta g^{\rho\sigma}$$

در نتیجه نقاط ثابت نسبت به وردش $\delta g_{\mu\nu}$، معادل نقاط ثابت وردش $\delta g^{\mu\nu}$ است.

با توجه به اینکه $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ وردش کنش به صورت زیر خواهد بود:

(4) $$\delta S_H = (\delta S)_1 + (\delta S)_2 + (\delta S)_3$$

که

(5) $$(\delta S)_1 = \int d^n x \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$$

(6) $$(\delta S)_2 = \int d^n x \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

(7) $$(\delta S)_3 = \int d^n x\, R\, \delta \sqrt{-g}$$

ترم دوم، خود به شکل یک ترم ضرب در $\delta g^{\mu\nu}$ است. برای بررسی دو ترم بعدی دست به کار باید شد!

تانسور ریچی از تانسور ریمان ساخته شده است، از این رو می‌توان وردش نمادهای کریستوفل را بررسی کرد.

(8) $$R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - (\lambda \leftrightarrow \nu)$$

ترم سوم و چهارم جابه‌جایی جمله اول و دوم است که با تغییر $\nu$ و $\lambda$ به دست می‌آید.

وردش نسبت به متریک، با کمک وردش نمادهای کریستوفل خواهد شد. از این رو

$$\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} + \delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} \qquad (9)$$

در تمرین ها نشان خواهید داد که

$$(10) \qquad \delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})_{;\alpha} - (\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha})_{;\nu}$$

$;\nu$ مشتق هم وردا است.

در نتیجه ترم دوم کنش انیشتین-هیلبرت به شکل زیر به دست می آید.

$$(11) \quad 0 = \int d^4x \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g}\, (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu})_{;\alpha}$$

این ترم طبق قانون گاوس صفر است زیرا تغییرات در مرزها صفر است.

برای محاسبه ترم سوم کنش EH باید از ارتباط بین دترمینان ماتریس و رد آن به صورت زیر استفاده کرد.
برای هر ماتریس M که دترمینان غیرصفر دارد، رابطه زیر برقرار است.

$$(12) \qquad \ln(\det M) = \mathrm{Tr}(\ln M)$$

$\ln M$ را به گونه ای تعریف کرده ایم $\exp(\ln M) = M$ حال وردش رابطه 12 برابر است

$$(13) \qquad \frac{1}{\det M}\,\delta(\det M) = \mathrm{Tr}(M^{-1}\delta M)$$

حال $M=g_{\mu\nu}$ ، $g = \det M = \det g_{\mu\nu}$ نتیجه:

$$\delta g = g\left(g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}\right) \tag{14}$$

$$= -g\left(g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\right)$$

در رابطه فوق از $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}\, g_{\nu\sigma}\, \delta g^{\rho\sigma}$ استفاده شده است. در نهایت برای ترم سوم خواهیم داشت.

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\delta g = \frac{g}{2\sqrt{-g}}\, g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} \tag{15}$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} \tag{16}$$

در رابطه (16)، $\delta g$ را از رابطه 14 جایگذاری کرده‌ایم. حال با داشتن ترم ۲ و ترم ۳ وردش کنش اینشتین هیلبرت خواهیم داشت.

$$\delta S_{EH} = \int d^n x\, \sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R\right]\delta g^{\mu\nu} \tag{17}$$

حال اگر در خاطرتان باشد برای کنش‌هایی که با میدان $\phi$ ساخته می‌شوند رابطه زیر را داریم.

$$(18) \qquad \delta S' = \int \sum_i \left( \frac{\delta S}{\delta \phi_i} \delta \phi^i \right) d^n x$$

$\{\phi^i\}$ مجموعه میدان های دینامیکی هستند، در مورد ما متریک $g^{\mu\nu}$. نقاط ایستای کنش انرژی

نقاطی هستند که $\frac{\delta S}{\delta \phi_i} = 0$ در نتیجه

$$(19) \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

جالب این است که در روش کنش انرژی اولین حدس ما که ساده ترین ممکن بود، یعنی

موجود اسکالر که به تقارن diff احترام می گذارد و روش مشتقات مرتبه دوم ترکیب است، جوابگو است.

نکته مهم دیگر این که ما معادله انیشتین را در خلاء بدست آوردیم زیرا فقط قسمت هندسی کنش

را در نظر گرفته ایم. برای به دست آوردن تانسور انرژی تکانه، کنش کلی را به صورت زیر می نویسیم.

$$(20) \qquad S = \frac{1}{16\pi G} S_{EH} + S_M$$

$S_M$ کنش ماده است. ضریب اینها را به گونه ای انتخاب کرده ایم

که معادله میدان را صحیح به دست آوریم. در نتیجه از کنش کلی نسبت به متریک وردش بگیریم

خواهیم داشت:

$$(21)\quad \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$$

در این مرحله شیء تحت تانسور انرژی تکانه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(22)\quad T_{\mu\nu} = -2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$$

با این تعریف معادله اینشتین را مجدداً بدست می‌آوریم

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G\, T_{\mu\nu}$$

حال سؤال این است که چرا باید فکر کنیم که رابطه (22) رابطه تانسور - انرژی تکانه است. اولاً این موجود متقارن است ثانیاً با توجه به تعریف بُعد آن چگالی انرژی است. تحلیل ابعادی زیر این را نشان می‌دهد

$$(23)\quad S_{EH} = \int \frac{d^4x\sqrt{-g}\, R}{16\pi G}, \qquad g_{\mu\nu},\, g$$ بدون بُعد

$$(24)\quad R \propto \Gamma_{;\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha\beta} \rightarrow L^{-2}\,,\ \text{طول}^{-2}$$

$$[G] = M^{-1}L^{3}T^{-2} = L^{+}L^{-2} = L^{2}$$

$$[S] \propto L^{-4} \quad \checkmark$$ از جنس چگالی انرژی

$$[\text{energy}/\text{volume}] = \frac{ML^{2}T^{-2}}{L^{3}} = \frac{L^{-1}L^{2}L^{-2}}{L^{3}} = L^{-4} \quad \checkmark$$

به عنوان مثال کنش یک میدان اسکالر به صورت زیر است.

$$(25)\quad S_\phi = \int \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \phi)(\nabla_\nu \phi) - V(\phi) \right] \sqrt{-g}\, d^n x$$

که معادله اویلر-لاگرانژ نسبت به میدان $\phi$ به صورت زیر است

$$(26)\quad \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \phi} - \nabla_\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Box \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0$$

به نشستن هم توجه کنید

که دالامبرین را به صورت زیر تعریف نموده ایم

$$(27)\quad \Box = \nabla^\mu \nabla_\mu = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$$

حال کنش (25) را با استفاده از معکوس تانسور متریک و نه میدان $\phi$ وردش بگیرید.

$$(28)\quad \delta S_\phi = \int d^n x \left[ \left( -\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \phi)(\nabla_\nu \phi) \right) \sqrt{-g} + \delta \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right) \right]$$

توجه داشته باشید که $\mu$ و $\nu$ در این عبارت dummy هستند در خط بعد

$\mu \to \rho$

$\nu \to \sigma$

رابطه (16)

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

(29)
$$\delta S_\phi = \int d^n x \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} \Big[ -\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \left(-\frac{1}{2}\right) g_{\mu\nu} \times \left( -\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \phi \nabla_\sigma \phi - V(\phi) \right) \Big],$$

حال با توجه به تعریف تانسور انرژی-تکانه برای میدان اسکالر خواهیم داشت:

(30)
$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}}$$
$$= \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \phi \nabla_\sigma \phi - g_{\mu\nu} V(\phi)$$

که نتیجه بسیار عالی از نظر میدان کلاسیک است.

(31)
$$\mathcal{L}_{\text{C. field}} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2$$
free-field

(32)
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - V(\phi)$$

(33)
$$T^{\mu\nu}_{\text{scalar}} = \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} \partial_\lambda \phi \partial_\sigma \phi - \eta^{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} \partial_\lambda \phi \partial_\sigma \phi + V(\phi) \right]$$

(1.170) Carroll

ارتباط تانسور انرژی تکانه با میدان و قضیه نوتر موضوعی است که به عنوان تمرین درس مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

## II درباره معادلات اینشتین

اگر به معادلات اینشتین $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ نظر بیاندازیم، دارای 10 درجه آزادی است. به دلیل تقارن، این بدین معنا است که 10 معادله دیفرانسیل مرتبه 2 برای 10 مولفه متریک داریم. در حالی که $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$ اتحاد بیانکی 4 قید بر روی تانسور ریچی اعمال می کند این بدین معنا است که معادلات اینشتین 6 معادله مستقل دارد!

حال از طرف دیگر متریک $g_{\mu\nu}$ اگر در یک مختصه $x^{\mu}$ جواب باشد در دستگاه $x'^{\mu}$ نیز صدق نموده. diff ها جواب است. پس در اندیس متریک نیز 6 درجه آزادی مستقل دارد.

معادلات اینشتین به شدت پیچیده اند، تانسور ریچی یا اسکالر ریچی از نمادهای کریستوفل که خود از متریک درست می شوند. از طرف دیگر معادلات غیرخطی هستند و اصل برهم نهی superposition به راحتی کار نمی کند. به طور مثال ساده ترین مسئله حل معادلات اینشتین در خلا است

خلا

$$\left.\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= 8\pi G T_{\mu\nu} = 0 \\ R - 2R = -R &= 8\pi G T = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow R_{\mu\nu} = 0 \qquad (34)$$

- حل خلاء معادله انیشتین

(35) $R_{\mu\nu}=0$

رابطه (35) می‌تواند پیچیده باشد.

به طور مثال جواب معادله انیشتین در بیرون یک ستاره (اسپهری‌گونه)

$T_{\mu\nu}$ $T_{\mu\nu}=T=0$

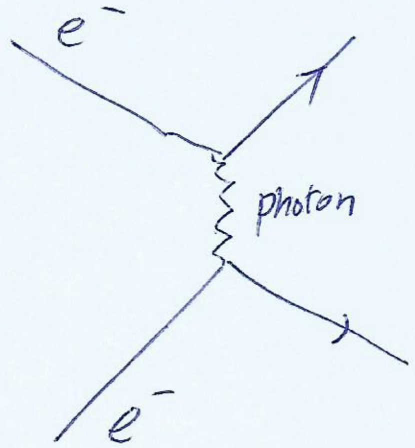
$R_{\mu\nu}=0$ $R^{\alpha}_{\mu}=0$

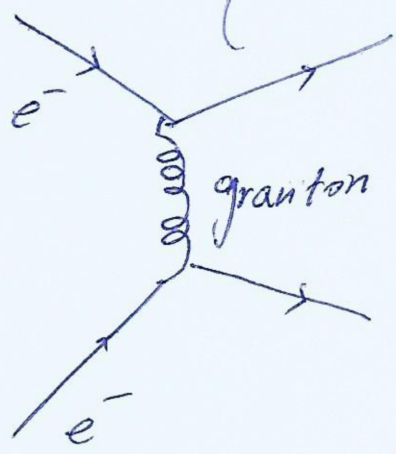
کاری که باید انجام داد استفاده از تقارن های سیستم است.

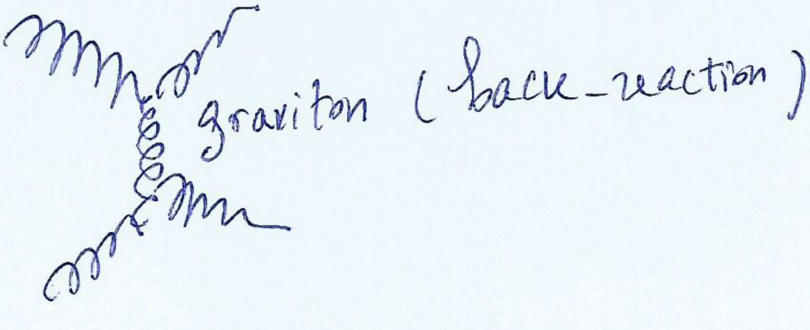
غیرخطی بودن معادلات انیشتین مفهوم عمیقی دارد این از اثر که گرانش در GR بر روی خود اثر دارد.

Back-reaction ایجاد می‌شود

اگر این چنین نبود (بخاطر اصل هم‌ارزی) انتظار داشتیم که جرم ثقیل آن‌ها بزرگتر از جرم لختی می‌شد. نمودارهای فاینمن زیر گویای داستان هستند




، باید درس ،