در جلسه قبل درباره ایده diffeomorphism به صورت مفصل بحث کردیم.

نکته آخر جلسه قبل این بود که تبدیلات diff. این امکان را می‌دهند که تانسورها را بر روی خمینه pull-back یا push-forward کنیم. این امکان، باعث می‌شود که بتوانیم تانسورها را در نقاط مختلف خمینه با یکدیگر مقایسه کنیم. با داشتن diff. به صورت

$$\phi : M \to M$$

و میدان تانسوری $T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}(x)$، می‌توانیم مقدار تانسور را در نقطه P، با مقدار آن در $\phi(p)$ که به نقطه P برگردانده می‌شود را

$$\phi^*\left[T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}(\phi(p))\right]$$

مقایسه کنیم. این به معنی امکان تعریف مشتق جدید است.

این مشتق جدید، آهنگ تغییر تانسور را بر اثر جریان diff. را به دست خواهد داد.

نکته مهم این است که نگاشت diff نمی‌تواند یک تک تبدیل باشد، بلکه مجموعه ای از diff هاست که با یک پارامتر t آن را مشخص می‌کنیم. در نتیجه ϕ_t خانواده تک پارامتری از diff هاست.

این خانواده می‌تواند به صورت مجموعه نگاشت‌ها به صورت زیر تعریف کرد.

(1) $R\times M \to M$, for each $t\in R$,

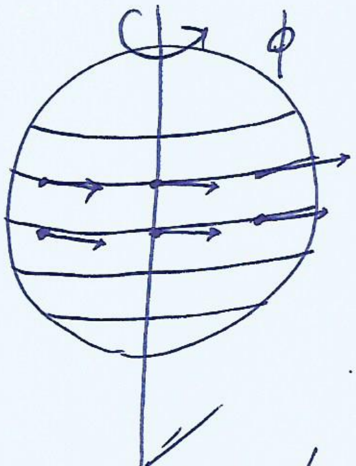
ϕ_t diff باشد : $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$

این خانواده diff ها را می‌توان فرض کرد که از یک میدان برداری $V^\mu(x)$ که تانژانت بر نقطه P روی خمینه است، به دست می‌آید.

با داشتن میدان برداری V^μ می‌توانیم منحنی‌های انتگرالی $\frac{dx^\mu}{dt} = V^\mu$ را داشته باشیم.

$x^\mu(t)$ ها از حل رابطه فوق به دست می‌آیند. به عنوان مثال diff. روی یک کره S^2 که با دوران حول محور z داده می‌شود.

شکل ۱)



$$\phi_t(\theta,\phi) = (\theta, \phi+t) \qquad (2)$$

به بیان دیگر ϕ_t، جریان را روی منحنی‌های انتگرالی به دست می‌دهد.

به میدان برداری مولد دیفئومورفیسم generator of the diffeomorphism گویند.

منحنی انتگرالی را بارها در فیزیک پایه دیده‌ایم همانند خطوط میدان مغناطیسی حول یک سیم. آنجا که منحنی‌های انتگرالی میدان برداری مغناطیسی $\vec{B}$ هستند.

حال با داشتن میدان برداری $V^\mu(x)$ این سؤال را می‌پرسیم که آهنگ تغییر تانسورها روی منحنی‌های انتگرالی چگونه است. وجود میدان برداری خانواده یک پارامتری t، diff. ها را تعریف می‌کند.

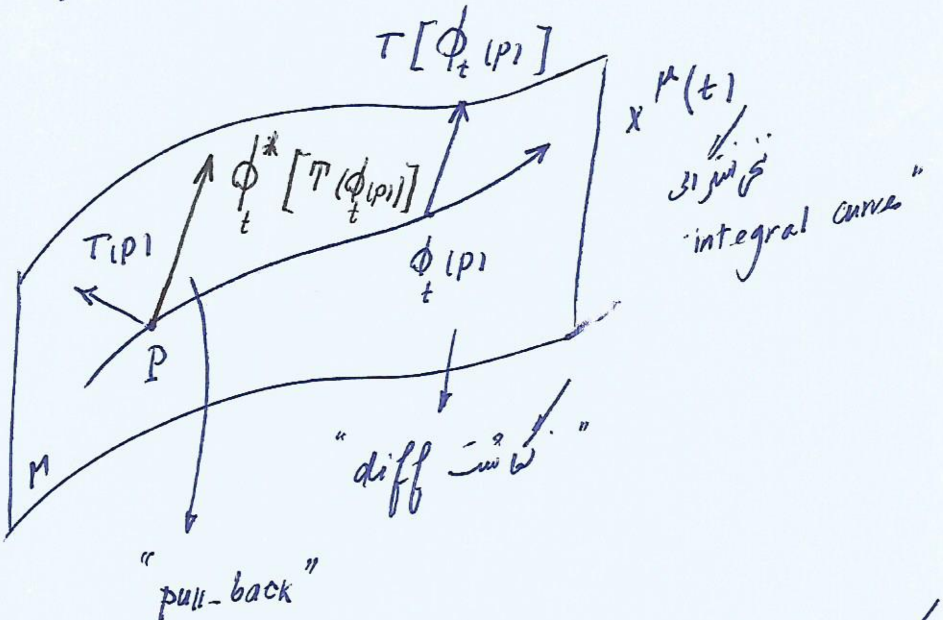
برای هر t می‌توان اختلاف pullback یک تانسور در نقطه p، مقدار اصلی آن را به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$(3) \qquad \underbrace{\Delta_t}_{\text{اختلاف با پارامتر diff. } t} T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}(p) = \phi_t^*\left[T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}(\phi_t(p))\right] - T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}(p)$$

نکته بسیار مهم این است که دو ترم سمت راست رابطه (3) در نقطه P تعریف شده است.

این پروسه که در رابطه (3) مشخص شده است را به صورت شماتیک می‌توانیم در شکل زیر تصور کنیم.

(شکل 2



با نگاشت diff ، $\phi_t(p)$ ، تانسور T را به نقطه جدید $\phi_t(p)$ می‌بریم و با pull-back
ϕ_t^* تانسور را به نقطه P برگردانده‌ایم.

اکنون می‌توانیم مشتق لی "Lie derivative" تانسور را در راستای میدان
برداری به صورت زیر تعریف کنیم.

$$(4) \qquad \mathcal{L}_V T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\Delta_t T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l}}{t} \right).$$

مشتق لی یک نگاشت از تانسور مرتبه (k,l) به تانسور (k,l) است که مستقل از دستگاه
مختصات است. مشتق لی خاصیت خطی بودن و احترام به قانون لایبنیتس را دارد.

$$(5) \qquad \mathcal{L}_V (aT + bS) = a\mathcal{L}_V T + b\mathcal{L}_V S$$

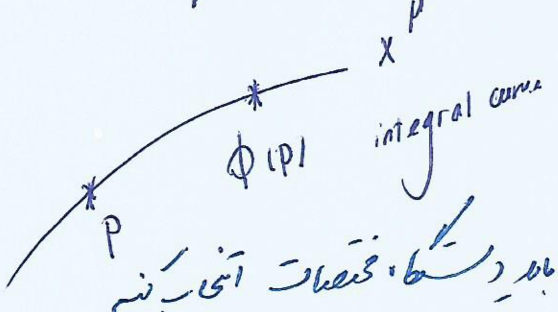
$$(6) \qquad \mathcal{L}_V (T \otimes S) = (\mathcal{L}_V T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_V S)$$

که T, S تانسورند. a, b اعداد ثابت.

نکته جالب این که از نظر ساختاری، مشتق لی ساده‌تر از مشتق هموردا است زیرا احتیاج به هموستار ندارد.

واضح است که مشتق لی بر روی توابع برابر مشتق جهت‌دار است.

$$(7) \qquad \mathcal{L}_V f = V(f) = V^\mu \partial_\mu f$$



برای این که اثر مشتق لی را بر روی تانسورها به دست آوریم، باید دستگاه مختصات را انتخاب کنیم

دستگاه مختصات $x^\mu = (x^1, \dots, x^n)$ که x^1 پارامتر روی منحنی انتگرال integral curve

است و سایر مختصه‌ها به صورت دلخواه انتخاب می‌شوند.

در نتیجه بردار $V \equiv \frac{\partial}{\partial x^1}$ خواهد بود که مختصه‌های آن $V^\mu = (1, 0, \dots, 0)$

خواهد بود. نکته جالب در انتخاب این بردار این است که diff. به اندازه t به تبدیل

مختصات به صورت زیر بیانجامد.

$$(8) \qquad x^\mu \to y^\mu = (x^1 + t, x^2, \dots, x^n)$$

در نتیجه ماتریس pull-back به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$(9) \qquad \big(\underset{\text{diff. param.}}{\phi_t}\,\underset{\text{pull-back}}{{}_*}\big)^\nu{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu$$

در نتیجه pull-back روی مولفه های تانسور از $\phi_t(p)$ به p برابر خواهد بود ؛

$$(10)\qquad \phi_{t*}\left[T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}(\phi_t(p))\right] = T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}(x^1+t, x^2, \ldots, x^n)$$

در این مختصه خاص مشتق لی برابر خواهد بود با

$$(11)\qquad \mathcal{L}_V T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} = \frac{\partial}{\partial x^1} T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} \;;$$

به طور واضح مشتق میدان برداری $U^\mu(x)$ به صورت $\mathcal{L}_V U^\mu = \dfrac{\partial U^\mu}{\partial x^1}$ خواهد بود.

عبارت فوق هم وردا covariant نیست.

البته می دانیم که جابه جاگر $[V,U]$ تانسور خوش تعریفی است، در نتیجه مولفه های این تانسور در مختصه ای که انتخاب کرده ایم به صورت زیر خواهد بود.

$$(12)\qquad [V,U]^\mu = V^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu V^\mu = \frac{\partial U^\mu}{\partial x^1}$$

مختصه انتخاب شده

با مقایسه رابطه فوق و $\mathcal{L}_V U^\mu = \dfrac{\partial U^\mu}{\partial x^1}$ نتیجه می گیریم که مشتق لی به صورت زیر تعریف خواهد شد

$$(13)\qquad \mathcal{L}_V U^\mu = [V,U]^\mu$$

نتیجه اولیه در مورد مشتق لی $\mathcal{L}_V U = -\mathcal{L}_U V$ ؛ توجه داشته باشید که $[V,U]$. لی براکت Lie bracket گویند.

در ادامه برای بررسی اثر $\mathcal{L}_V$ بر روی فرم‌ها که مولفه w_μ دارند از تاثیر مشتق لی بر روی اسکالر شروع می‌کنیم. توجه داشته باشید که $\mathcal{L}_V f = V(f)$ در نتیجه

$$\mathcal{L}_V (w_\mu U^\mu) = V(w_\mu U^\mu) = V^\nu \partial_\nu (w_\mu U^\mu) \tag{14}$$

$$= V^\nu (\partial_\nu w_\mu) U^\mu + V^\nu w_\mu (\partial_\nu U^\mu)$$

از طرف دیگر، می‌توان قانون لایبنیتس را بر روی اسکالر $w_\mu U^\mu$ استفاده کرد.

$$\mathcal{L}_V (w_\mu U^\mu) = (\mathcal{L}_V w)_\mu U^\mu + w_\mu \underline{(\mathcal{L}_V U)^\mu} \tag{15}$$

استفاده از تعریف لی براکت

$$\mathcal{L}_V (w_\mu U^\mu) = (\mathcal{L}_V w)_\mu U^\mu + w_\mu V^\nu \partial_\nu U^\mu - w_\mu U^\nu \partial_\nu V^\mu \tag{16}$$

که اگر دو رابطه 15 , 16 را با هم برابر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}_V w_\mu = V^\nu \partial_\nu w_\mu + (\partial_\mu V^\nu) w_\nu \tag{17}$$

که این تعریف هم درست است. به همین فرایند، مشخصاً می‌توانیم مشتق لی یک تانسور را محاسبه کنیم.

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = V^\sigma \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \tag{18}$$

$$- (\partial_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}$$

$$- (\partial_\lambda V^{\mu_2}) T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} - \cdots$$

$$+ (\partial_{\nu_1} V^{\lambda}) T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l}$$

$$+ (\partial_{\nu_2} V^{\lambda}) T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} + \cdots$$

عبارت فوق همورداست. با وجود اینکه مشتقات معمولی ظاهر شده، از تعویض دقیق‌تر با مشتق هموردا
که با عبارت فوق برابر است.

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = V^\sigma \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \tag{19}$$

$$- (\nabla_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}$$

$$- (\nabla_\lambda V^{\mu_2}) T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} - \cdots$$

$$+ (\nabla_{\nu_1} V^{\lambda}) T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l}$$

$$+ (\nabla_{\nu_2} V^{\lambda}) T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} + \cdots$$

∇_μ مشتق هموردا (torsion-free) است.

یک عبارت بسیار مهم در مشتق لی استفاده از آن برای متریک است.

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = \underbrace{V^\sigma \nabla_\sigma g_{\mu\nu}}_{=0} + (\nabla_\mu V^\lambda) g_{\lambda\nu} + (\nabla_\nu V^\lambda) g_{\mu\lambda} \tag{20}$$

با توجه به اینکه مشتق هموردا متریک صفر است و این نکته که متریک می‌تواند از مشتق هموردا عبور کند و اندیس‌ها را بالا/پایین کند ($\nabla_\sigma g_{\mu\nu}=0$) در نتیجه

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu \tag{21}$$

یا

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} V_{\nu)} \tag{22}$$

حال سوال این است که ارتباط این ریاضیات با نسبیت عام چیست؟

بارها شنیده اید که می‌گویند نظریه نسبیت عام یک نظریه دیفئومورف است

"GR is a differmorphism invariant theory"

این بدین معناست که اگر فضای زمان را با یک خمینه M با متریک $g_{\mu\nu}$ و میدان‌های مادی ψ مدل کنیم و نگاشت $\phi: M \to M$ یک نگاشت diffeomorphism باشد آنگاه مجموعه $(M, g_{\mu\nu}, \psi)$ و $(M, \phi^* g_{\mu\nu}, \phi^* \psi)$ وضعیت فیزیکی یکسانی را مدل می‌کنند.

از آن جائی که .diff یک تبدیل مختصات فعال active coordinate transf. است،

می توان گفت که نظریه نسبیت عام یک نظریه مختصات ناوردا است "Coordinate invariant"

البته در مورد این جمله، کمی باید دقیق شد، بدین معنا که diff. invariant به این معناست که

1) نظریه مستقل از هندسه از پیش تعیین شده است "free of "prior geometry"

2) دستگاه مختصات از پیش تعیین شده وجود ندارد "No preferred coordinate"

مورد 1: در نسبیت عام بدین معنا است که متریک، همه ستاره‌ها، جسم و ... همه کمیت‌های دینامیکی هستند، مانند نسبیت خاص یا مکانیک کلاسیک از پیش تعیین شده نیستند.

مورد 2: مواردی است که نظریه نسبیت عام را "generally covariant" یا "diffeomorphism invariant" می‌گویند.

"پایان درس"