نسبیت عام نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹ ۱۳۹۹/۱/۲۵ ۱,

معادله انیشتین - معادله میدان نسبیت عام

تمام مقدمات را آماده کرده‌ایم که در معادله میدان انیشتین را به دست آوریم. سؤال این است که میدان گرانشی چگونه رفتار ماده (دینامیک) آن را تغییر می‌دهد و دوم این که ماده چگونه هندسه را تعیین می‌کند. این سؤال در مکانیک نیوتنی با دو رابطه زیر داده می‌شود.

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi \qquad / \qquad \nabla^2\phi = 4\pi G\rho \qquad (1)$$

پتانسیل گرانشی ← حرکت اجسام را تعیین کند

توزیع ماده ← پتانسیل گرانشی را تعیین می‌کند

در نسبیت عام این دو رابطه را باید درست کرد.

How Matter Move ← Curvature / Curvature ← Energy Momentum Tensor

خمش فضازمان ← حرکت ماده

تانسور انرژی تکانه ← خمش فضا-زمان

این قسمت از ایجاد شهود و نوشتن معادله میدان با استفاده از ایده Correspondence Principle است به این معنا که نظریه سطح بالاتر باید بتواند در حدهای معقول به نظریه سطح پایین‌تر برسد.

نسبیت عام $\xleftarrow{\text{پارامتر تنظیم نظریه}}$ قانون گرانش نیوتنی

2/

سئوال دوم نوشتن معادله بر اساس اصل هم ارزی انیشتین Einstein Equivalence Principle (EEP) با این بیان « در ناحیه بسیار کوچکی از فضا-زمان، قوانین فیزیک به قوانین نسبیت خاص کاهیده می‌شود. این اصل ایده مفهوم خمینه را وارد بحث‌های ما کرد.
Manifolds

ایده دیگری که اصل هم ارزی با خود دارد، این است که گرانش جهان شمول است
Universal

و همه اجسام (هر نوع تانسور انرژی-تکانه) را تحت تاثیر قرار می‌دهد.

ترکیب این ایده این نکته را به ذهن انیشتین متبادر کرد که گرانش می‌تواند خمش فضا-زمان باشد
Curvature

تمام این نکات ایده نظریه‌ای با Minimal-Coupling Principle را مطرح می‌کند با این عنوان

1. قانون فیزیک را انتخاب کنید که در دستگاه لخت - در فضا-زمان تخت صحیح باشد.
2. این رابطه را به صورت تانسوری (tensorial) Coordinate invariant
3. ادعا کنید (سپس به صورت تجربی) نشان دهید که این قانون در فضا-زمان خمیده صحیح است بنویسید

به بیان دیگر متریک مینکوفسکی را به متریک کلی و مشتقات جزئی را به مشتق هموردا تبدیل کنید

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(x^\mu) \qquad (2)$$

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu \qquad (\, , \rightarrow \, ; \,)$$

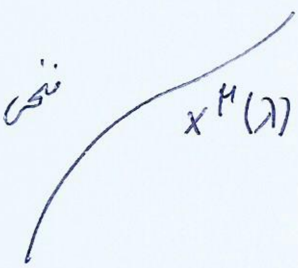
Comma goes to Semicolon rule.

اگر خاطرتان باشد نمونه از این مشتق ها می تواند معادله ژئودزی باشد.

$$(3) \qquad \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}=0 \longrightarrow \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\cdot\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$$

که از تبدیل مختصات به دست آوردیم. این رابطه را می توانیم به شکل دیگری ببینیم

منحنی x^μ را روی خمینه در نظر بگیرید.



$$(4) \qquad \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}=0 \rightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)=0$$

مشتق دوم از جنس تانسوری نیست   بردار است - شکل تانسوری

حال با ایده Minimal Coupling، مشتق کامل را بر حسب مولفه ها نوشته، مشتق جزئی را به مشتق هم وردا تبدیل می کنیم.

$$(5) \qquad \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}=\underbrace{\frac{dx^\nu}{d\lambda}\partial_\nu}_{\text{مشتق دوم}}\underbrace{\frac{dx^\mu}{d\lambda}}_{\text{بردار}}$$

$$(6) \qquad \frac{dx^\nu}{d\lambda}\partial_\nu\frac{dx^\mu}{d\lambda} \rightarrow \frac{dx^\nu}{d\lambda}\nabla_\nu\frac{dx^\mu}{d\lambda}=\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\nu\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

از مشتق جزئی

در نتیجه $\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}=0$ با اصل minimal - coupling، معادله ژئودزی به دست می‌آید.

(7)
$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\cdot\frac{dx^\sigma}{d\lambda}=0$$

یک مثال مهم دیگر پایستگی تانسور انرژی - تکانه است در فضای مینکوفسکی $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$ در نتیجه تعمیم رابطه فوق در فضا - زمان خمیده به صورت زیر است.

(8)
$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$$

در ادامه بحث Correspondence Principle باید تعریف دقیقی از حد نیوتنی داشته باشیم. شرایط حد فیزیک نیوتنی به صورت زیر است

(9)

1. حرکت ذرات نسبت به نور کند باشد
2. میدان گرانشی ضعیف باشد به این معنا که اختلال حول متریک زمینه کوچک باشد
3. میدان گرانشی استاتیک باشد (تابعی از زمان نباشد)

برای بررسی حد میدان نیوتنی در معادله ژئودزی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

(10)
$$\underbrace{\frac{dx^i}{d\tau}}_{\text{سرعت ذره}} \ll \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\text{سرعت نور}}$$

در نتیجه معادله ژئودزی را به صورت زیر می‌توانیم تقریب بزنیم.

$$(11) \qquad \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

از آنجایی که میدان استاتیک است خود کریستوفل به صورت زیر ساده می‌شود.

$$(12) \qquad \Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\underbrace{\partial_0 g_{\lambda 0}}_{=0} + \underbrace{\partial_0 g_{0\lambda}}_{=0} - \partial_\lambda g_{00})$$

$$= -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00}$$

از طرف دیگر ضعیف بودن میدان گرانشی به ما این فرصت را می‌دهد که متریک را به صورت زیر بنویسیم

$$(13) \qquad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

با توجه به تعریف معکوس متریک $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma$ داریم.

$$(14) \qquad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

که $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$. نکته مهم این که در این حد اندیس‌ها را می‌توان با متریک مینکوفسکی بالا و پایین برد، زیرا تصحیحات از مرتبه بالاتر خواهد بود. در نتیجه Γ^μ_{00} را در تقریب نیوتنی به شکل زیر درخواهد آمد.

$$(15) \qquad \Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00}$$ مرتبه (1) در h

در نتیجه معادله ژئودزی تبدیل خواهد شد به

$$(16) \qquad \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

در ادامه با استفاده از این قید که $\partial_0 h_{00} = 0$ مولفه $\mu = 0$ نتیجه

(17) $$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \quad , \quad \frac{dt}{d\tau} = cte$$

این بدین معنا است که فقط ترم قسمت فضایی وجود دارد

(18) $$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \partial_i h_{00}$$

با تقسیم دو طرف به $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$، مشتقات را می‌توان به شکل زیر نوشت:

(19) $$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}$$

(20) $$\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi$$

حال این روابط را با معادله نیوتن مقایسه کنید

به این نتیجه می‌رسیم که

(21) $$h_{00} = -2\Phi$$

(22) $$g_{00} = -(1+2\Phi)$$

این بدین معنا است که اختلال در تانسور متریک می‌تواند گرانش نیوتنی را توضیح دهد. برای یک جسم

پتانسیل نیوتنی برابر خواهد بود با $\Phi = -\frac{GM}{r}$.

حال سوال این است که معادله میدانی که این پتانسیل را به دست می‌دهد چیست؟

حال هدف این است که معادله میدان را برای متریک به دست آوریم.

□ معادلات اینشتین

برای به دست آوردن معادله میدان باید براساس تمام دانشی که تاکنون به دست آورده ایم، معادلات میدان را بنویسیم و با داده های تجربی چک کنیم. همان طوری که با معادلات ماکسول انجام دادیم. توجه داشته باشید که به دست آوردن معادله میدان با استفاده از لاگرانژی و اصل کمترین کنش نیز از جنس فوق است. در نظر گرفتن یک ansatz با تمام دانشی که داریم و چک کردن آن با داده های تجربی. پس دو روش وجود دارد.

1. روش اینشتین ، informal thinking & cooking up

2. روش کنش

روش اینشتین می خواهیم معادله پواسون $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$ را به صورت عامی بنویسیم. $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i \partial_j$

چگالی ماده

اگر جرم به صورت نقطه ای توصیف شود جواب پتانسیل گرانشی Φ را داریم. سمت راست معادله پواسون چگالی ماده هست است که تعمیم یافته آن تانسور انرژی تکانه است. سوالی که مطرح است این است که قسمت هندسی را چگونه بنویسیم. رابطه ضعیف معادله ژئودزی ایده ای را در بر دارد و آن لاپلاسی متریک است.

8,

حدس اولیه این است که مشتق رتبه دوم متریک با تانسور انرژی-تکانه مرتبط باشد

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu} \qquad (24)$$

البته باید توجه داشته باشیم که تقاضای ما ارتباط تانسوری است. بنابراین نمی‌تواند $\Box = \nabla^\mu \nabla_\mu$ باشد که به دلیل metric compatibility مشتق هموردای متریک صفر است.

- خوشبختانه موجود هندسی بسیار مفیدی را تعریف کردیم به اسم تانسور ریمان $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ که از مشتقات رتبه دوم متریک تشکیل شده است و نشانگر خمش فضا و زمان است.

البته تعداد اندیس‌ها (رتبه تانسور) مناسب نیست زیرا قسمت ماده با تانسور انرژی-تکانه داده می‌شود. ولی تنجش تانسور ریمان، تانسور ریچی را به دست می‌دهد، از این رو بسیار وسوسه انگیز است که معادله انیشتین را به صورت زیر بنویسیم ...

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \qquad (25)$$

κ ثابتی است که آن را باید تعیین کنیم. این حدس را خود انیشتین داشته است. البته! باز مشکل داریم اگر بخواهیم پایستگی تانسور انرژی-تکانه را داشته باشیم

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \qquad (26)$$

این رابطه پایستگی دلالت می کند که $\nabla^{\mu} R_{\mu\nu}$ صفر باشد در حالی که اینچنین نیست

اتحاد بیانکی نشان می دهد

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_{\nu} R \tag{27}$$

این اتحاد اجازه نمی دهد که حدس $R_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}$ را قبول کنیم زیرا در این صورت

مشتق آن برابر خواهد بود با

$$R_{\mu\nu} = K T_{\mu\nu} \xrightarrow[\text{trace}]{} R = K T \rightarrow \nabla_{\nu} R = K \nabla_{\nu} T \tag{28}$$

شرط پایستگی $\nabla_{\nu} T = 0$ از آنجایی که T اسکالر است

$\nabla_{\nu} T = \partial_{\nu} T = 0$

که این رابطه منطقی نیست چون مشتق فضایی ردِ تانسور انرژی-تکانه همواره نمی تواند صفر باشد.

قدم بعد:

قدم بعد تلاش زیادی نمی خواهد. metric compatibility بعلاوه اتحاد بیانکی (27)

راهنمای خوبی است. می توان یک تانسور مرتبه ۲ از مشتقات مرتبه ۲ از متریک ساخت

که شرایط پایستگی را حفظ کند و آن تانسوری نیست جز تانسور اینشتین

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{29}$$

حال معادله اینشتین پیش روی شما است.

$$G_{\mu\nu} = K T_{\mu\nu}$$

(30) $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = K T_{\mu\nu}$$

سمت راست شکل تانسوری هم وردا، متقارن، پایسته از انرژی تکانه است.

سمت چپ یک تانسور هندسی، متقارن، پایسته (اتحاد بیانکی) که از مشتقات مرتبه دوم تشکیل شده است. حال دو هدف در این درس بیشتر نداریم، حد کلاسیک Correspondence و تعیین ضریب K، در ادامه به بررسی این دو سوال می پردازیم.

رد معادله اینشتین به صورت زیر است

(31) $$R^{\mu}_{\ \mu} - \frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\mu} R = K T^{\mu}_{\ \mu} \rightarrow R = -KT$$

با استفاده از این رابطه معادله اینشتین را می توان به شکل زیر نوشت

(32) $$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} K g_{\mu\nu} T = K T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = K \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right)$$

برای تعیین ضریب K، فرض می کنیم که یک شاره کامل داشته باشیم.

(33) $$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\, u_\mu u_\nu + p\, g_{\mu\nu}$$

u^μ چهاربردار سرعت و ρ و p چگالی و فشار سکون سیال هستند. برای بررسی حد نیوتنی می‌توانیم از فشار سیال صرف نظر کنیم چون $p/\rho \propto (v/c)^2$ و سرعت ذرات کم است.

درنتیجه با تانسور انرژی-تکانه غبار dust سروکار داریم که در دستگاه همراه آن مسئله را حل می‌کنیم.

(34) $$T_{\mu\nu} = \rho\, u_\mu u_\nu \quad , \quad u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$$

قسمت زمانی u^μ را می‌توانیم از رابطه $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$ استفاده کنیم

مولفه‌های متریک به صورت زیر به دست می‌آید.

(35) $$g_{00} = -1 + h_{00}$$

$$g^{00} = -1 - h^{00}$$

درنتیجه تا مرتبه اول $h_{\mu\nu}$ خواهیم داشت

(36) $$g_{00} u^0 u^0 = -1 \to (-1 + h_{00})\, {u^0}^2 = -1$$

$$\to \boxed{u^0 = 1 + \frac{1}{2} h_{00}}$$

جایگذاری $\simeq (-1 + h_{00})(1 + h_{00}) \simeq -1 - \cancel{h_{00}} + \cancel{h_{00}} + O(h_{00}^2)$

اگر چگالی ماده را نیز اختلال جزئی فرض کنیم $\rho\, h_{00}$ را می‌توان صرف نظر کرد.

درنتیجه $u^0 = +1$, $u_0 = -1$

(37) $T_{00} = \rho$

در نتیجه تانسور انرژی - تکانه

حال می‌توان رد را حساب کرد

(38) $T = g^{00} T_{00} = -T_{00} = -\rho$

در نتیجه با جاگذاری در معادله انیشتین با دو ترم انرژی - تکانه خواهیم داشت

(39)

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right)$$

$$R_{00} = \kappa \left(\rho - \frac{1}{2} (-\rho)(-1) \right) = \frac{\kappa \rho}{2}$$

در نتیجه تنها ترمی که باید آن را محاسبه کنیم ترم صفر-صفر تانسور ریچی است.

(40)

$$R_{00} = R^{\mu}{}_{0\nu 0} = \partial_\nu \Gamma^{\mu}_{00} - \underbrace{\partial_0 \Gamma^{\mu}_{0\nu}}_{2} + \underbrace{\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{00}}_{\text{ترم } 3}$$

$$- \Gamma^{\mu}_{0\lambda} \Gamma^{\lambda}_{0}$$

ترم ۳ مرتبه بالاتر h

ترم ۴ - مرتبه بالا h

ترم دوم به خاطر استاتیک بودن میدان صفر است.

(41)

$$R_{00} = R^{i}{}_{0i0} = \partial_i \left[\frac{1}{2} g^{i\lambda} \left(\underset{0}{\partial_0 g_{\lambda 0}} + \underset{0}{\partial_0 g_{0\lambda}} - \partial_\lambda g_{00} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00}$$

$$= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}$$

در نتیجه معادله انیشتین به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa\rho \qquad (42)$$

حال اگر خاطرتان باشد $h_{00} = -2\Phi$ است، برای این که معادله پواسون را به دست آوریم.

$$\boxed{\kappa = 8\pi G} \qquad (43)$$

در نتیجه معادله نسبیت عام به صورت زیر خواهد بود.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G\, T_{\mu\nu} \qquad (44)$$

سلام، معادله انیشتین!

« پایان درس »