اندرکنش امواج گرانشی با بار آزمون

در این درس نامه به ارتباط امواج گرانشی و بار آزمون خواهیم پرداخت. این بحث مهم است از این رو که به آشکارسازی امواج گرانشی مرتبط است.

معادله ژئودزی برحسب مختصه، چهاربردار سرعت به صورت زیر است.

$$(1)\qquad \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)\,\frac{dx^\nu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\rho}{d\tau}=0$$

$$(2)\qquad \frac{du^\mu}{d\tau}+\Gamma^\mu_{\nu\rho}\,u^\nu u^\rho=0$$

حال فرض کنید که دو ژئودزی نزدیک به هم را داشته باشیم $x^\mu(\tau)$ ، $x^\mu(\tau)+\xi^\mu(\tau)$ که $x^\mu(\tau)$ در رابطه فوق صدق می‌کند، ژئودزی دیگر در رابطه زیر

$$(3)\qquad \frac{d^2(x^\mu+\xi^\mu)}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x+\xi)\,\frac{d(x^\nu+\xi^\nu)}{d\tau}\cdot\frac{d(x^\rho+\xi^\rho)}{d\tau}=0$$

اگر ξ^μ نسبت به تغییرات میدان گرانشی کوچک باشد، اختلاف رابطه (3) و (2) را در مرتبه اول در ξ^μ به صورت زیر خواهیم داشت: (تمرین سری 2 - رابطه زیر را به دست آورید.)

$$(4)\qquad \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}+2\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)\,\frac{dx^\nu}{d\tau}\cdot\frac{d\xi^\rho}{d\tau}+\xi^\sigma\partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)\,\frac{dx^\nu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\rho}{d\tau}=0$$

این معادله را معادله انحراف ژئودزی geodesic deviation می‌گویند.

حال با توجه به تعریف مشتق هم‌وردا

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} \qquad (5)$$

می‌توانیم رابطه (4) به صورت زیر بنویسیم (تمرین سری 2)

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu_{\ \nu\rho\sigma}\, \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\sigma}{d\tau} \qquad (6)$$

$$= -R^\mu_{\ \nu\rho\sigma}\, \xi^\rho u^\nu u^\sigma$$

این رابطه نشان می‌دهد که دو ژئودزی زمان‌گونه کنار هم، نیروی کشندی را حس می‌کنند که متناسب است با تانسور ریمان!

□ حال به ارتباط مختصه آشکارساز proper detector frame و پیمانه TT خواهیم پرداخت.

TT پیمانه‌ای است که معادلات اینشتین در آن به شکل ساده‌ای نوشته می‌شوند.

اگر یک پاره آزمون در سکون باشد ($\tau = 0$) از معادله ژئودزی خواهیم داشت

$$\left.\frac{d^2x^i}{d\tau^2}\right|_{\tau=0} = -\left[\Gamma^i_{\nu\rho}(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \cdot \frac{dx^\rho}{d\tau}\right]_{\tau=0} \qquad (7)$$

$$= -\left[\Gamma^i_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2\right]_{\tau=0}$$

در خط دوم رابطهٔ (7) فرض کردیم که $\frac{dx^i}{d\tau}=0$ (ذره در سکون) است.

با نوشتن تانسور متریک به صورت اختلال حول منسکوفسکی $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$ نماد کریستوفل به صورت زیر خواهد بود.

$$(8) \qquad \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}=\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\left(\partial_\nu h_{\sigma\rho}+\partial_\rho h_{\nu\sigma}-\partial_\sigma h_{\nu\rho}\right)$$

از این رو Γ^i_{00} برابر خواهد بود با

$$(9) \qquad \Gamma^i_{00}=\frac{1}{2}\left(2\partial_0 h_{0i}-\partial_i h_{00}\right)$$

اما در پیمانه TT، h_{00} و h_{0i} هر دو صفر هستند. از این رو $\frac{d^2x^i}{d\tau^2}$ در پیمانه TT صفر است. از این رو $\frac{dx^i}{d\tau}$ نیز صفر است.

از این رو ذرات قبل و بعد از عبور امواج گرانشی ثابت است. (البته این جمله تا تقریب $O(h)$ درست است.) این بدین معنا است که ذرات آزمون در این پیمانه خاص مختصه خودشان را تغییر نمی‌دهند. از این رو از آن‌ها می‌توان به عنوان Marker دستگاه مختصات انتخاب کرد.

در این راستا مناسب است که مختصه فضایی $\mu=i$ معادله انحراف ژئودزی را بررسی کنیم.

$$(10)\qquad \frac{d^2\xi^i}{d\tau^2}\Big|_{\tau=0} = -\left[2c\,\Gamma^i_{0\rho}\frac{d\xi^\rho}{d\tau} + c^2\xi^\sigma\partial_\sigma\Gamma^i_{00}\right]_{\tau=0}$$

در پیمانه TT نشان دادیم که $\Gamma^i_{00}=0$، ترم اول سمت راست $\Gamma^i_{0\rho}$ زمانی غیرصفر است که $\rho=i$ باشد. در پیمانه TT، $\Gamma^i_{0j}=\frac{1}{2}\partial_0 h_{ij}$ درنتیجه معادله انحراف ژئودزی به صورت زیر است.

$$(11)\qquad \Gamma^i_{0j}=\frac{1}{2}\partial_0 h_{ij} \rightarrow \frac{d^2\xi^i}{d\tau^2}\Big|_{\tau=0} = -\left[\dot{h}_{ij}\, d\xi^i/d\tau\right]_{\tau=0}$$

حال اگر در $\tau=0$، $d\xi^i/d\tau=0$ باشد $d^2\xi^i/d\tau^2=0$ درنتیجه ξ^i هم همواره ثابت باقی خواهد ماند. توجه داشته باشید ξ^i فاصله مختصاتی است و طول فضایی (همراه) نیست. از طرف دیگر چون $h_{00}=h_{0i}=0$ است که زمان همراه برای یک مسیر زمان گونه $x^\mu(\tau)=(x^0(\tau),x^i(\tau))$ به صورت زیر است.

$$(12)\qquad c^2d\tau^2 = c^2dt^2(\tau) - (\delta_{ij}+h^{TT}_{ij})(dx^i(\tau)dx^j(\tau))$$
$$= c^2dt^2(\tau) - (\delta_{ij}+h^{TT}_{ij})\underbrace{\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}}_{=0}d\tau^2$$

در شرایط اولیه

نتیجه مهم این که زمان بار آزمون (مختصه t) همان زمان همراه است.

این نتیجه در نگاه اول شاید حیرت انگیز باشد که امواج گرانشی مختصه را تغییر نمی‌دهند.

البته این بدین معنا نیست که امواج گرانشی اثر فیزیکی ندارند بلکه بدین معنا است که ما

آزادی پیمانه‌ای مختصه‌ای را انتخاب کرده‌ایم که با عبور امواج گرانشی آن مختصه تغییر نمی‌کند!

اثرات فیزیکی را با بررسی ویژه زمان همراه و فاصله همراه به دست می‌آوریم.

حال فرض کنید که دو رویداد $(t, x_1, 0, 0)$ و $(t, x_2, 0, 0)$ را داشته باشیم

در پیمانه TT، فاصله مختصاتی برابر است با $x_2 - x_1 = L$ که این

طول ثابت می‌ماند. حال طول فضازمانی در اثر عبور امواج گرانشی را به دست بیاورید.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dz^2 + \left\{1 + h_+ \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\right\} dx^2 + \left\{1 - h_+ \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\right\} dy^2 + 2h_\times \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] dx\,dy \tag{13}$$

با این پیکربندی طول فضازمانی این دو رویداد برابر خواهد بود با

$$S = (x_2 - x_1)\left[1 + h_+ \cos(\omega t)\right] \tag{14}$$

که فقط قطبش خطی متناظر با h_+ در نظر گرفته شده است.

این یعنی فضا است که طول فضا-زمان با زمان به دلیل امواج گرانشی نوسان می‌کند.

اگر فاصله بین دو رویداد بردار $\vec{L}$ باشد. در این صورت

$$s^2 = L^2 + h_{ij}(t) L_i L_j \qquad (15)$$

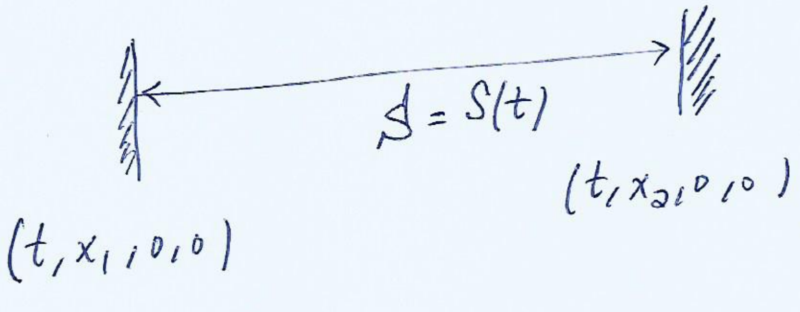
و تا درجه خطی تا h تعریف خواهیم داشت.

$S_i = n_i s_i$ تعریف $L_i / L = n_i$

$$\ddot{S}_i \simeq \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij} L_j \qquad (16)$$

$$\simeq \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij} S_j$$

در مرتبه h ، L و s هم مرتبه هستند.



از این دو آینه سالم free-fall مناسب این اندازه‌گیری است.

در ادامه جهت قطبش امواج گرانشی و مفهوم h_+ ، $h_\times$ را بررسی خواهیم کرد.

برای ادامه بحث به کتاب Carroll برمی‌گردیم و روابط قبلی را بار دیگر استخراج کرده

اثر فیزیکش را بر روی ذره‌های آزمون بررسی می‌کنیم.

نشان دادیم که در پیمانه TT تا مرتبه اول h ، ذره ساکن باقی می‌ماند! حال به معادله انحراف

ژئودزی geodesic deviation رجوع می‌کنیم.

S^μ : Separation Vector

$$\frac{D^2}{d\tau^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho S^\sigma \qquad (17)$$

چهار بردار سرعت $U^\nu = (1,0,0,0)$ در نظر می‌گیریم، چون تانسور ریمان از مرتبه خطی در h است،

از این رو ترم‌های مرتبه h قابل صرف‌نظر هستند. تانسور ریمان تا مرتبه h به صورت زیر است.

$$R_{\mu 0 0 \sigma} = \frac{1}{2}\left(\partial_0 \partial_0 h^{TT}_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu h^{TT}_{00} - \partial_\sigma \partial_0 h^{TT}_{\mu 0} - \partial_\mu \partial_0 h^{TT}_{\sigma 0}\right) \qquad (18)$$

ولی چون $h^{TT}_{\mu 0} = 0$ در نتیجه

$$R_{\mu 0 0 \sigma} = \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h^{TT}_{\mu\sigma} \qquad (19)$$

همچنین برای slowly-moving particle

$$\tau = x^0 = t$$

در نتیجه معادله ژئودزی برابر خواهد بود با

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^\mu = \frac{1}{2} S^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^{TT\,\mu}{}_{\sigma} \tag{20}$$

برای موجی که در راستای x^3 منتشر می‌شود، تنها ترم‌های S^1, S^2 تغییر می‌کنند. و ذرات آزمون فقط در صفحه عمود بر راستای انتشار موج جابجا می‌شوند.

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

در حالت اول فرض می‌کنیم $h_\times = 0$ در این صورت

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(h_+ e^{iK_\alpha x^\alpha} \right) \tag{22}$$

و

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 = -\frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(h_+ e^{iK_\alpha x^\alpha} \right) \tag{23}$$

حل دو معادله فوق برابر خواهد بود با

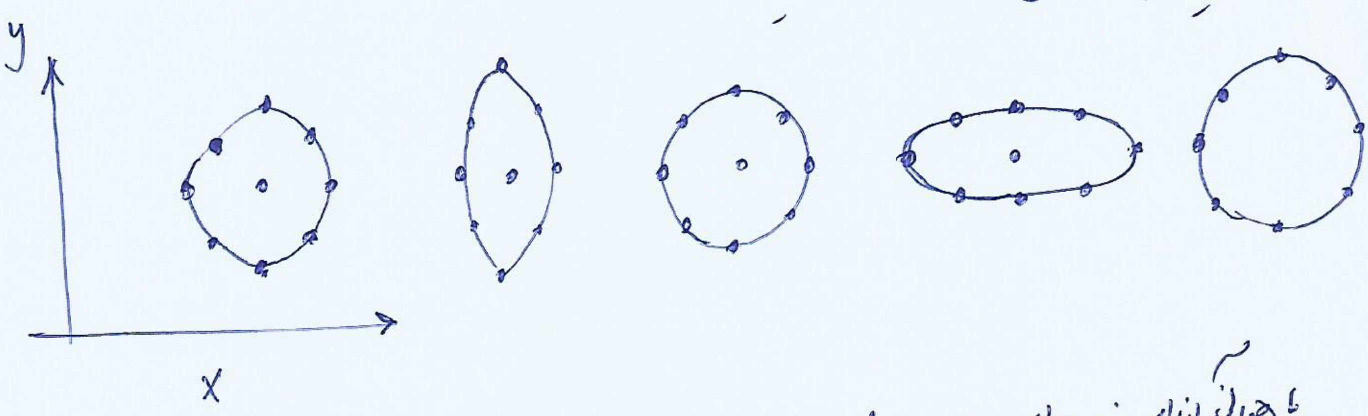
$$S^1 = \left(1 + \frac{1}{2} h_+ e^{iK_\sigma x^\sigma} \right) S^1(0) \tag{24}$$

$$S^2 = \left(1 - \frac{1}{2} h_+ e^{iK_\sigma x^\sigma} \right) S^2(0) \tag{25}$$

این بدین معنا است که اگر جابه جائی در جهت x^1 باشد در راستای جهت x^1 باقی می ماند.

در این صورت شکل (1) را نگاه کنید.

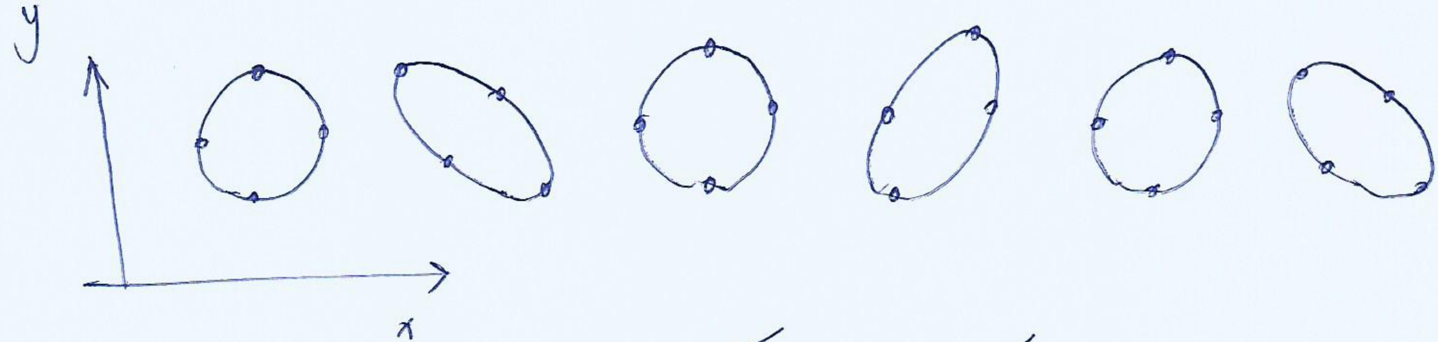
26



با همان آنالیز برای $h_x \neq 0$ ، $h_+ = 0$

(26)

$$\begin{cases} S^1 = S^1(0) + \frac{1}{2} h_x e^{iK_\sigma x^\sigma} S^2(0) \\ S^2 = S^2(0) + \frac{1}{2} h_x e^{iK_\sigma x^\sigma} S^1(0) \end{cases}$$



در درس ما بعد درباره تولید انرژی امواج گرانشی صحبت خواهیم کرد.