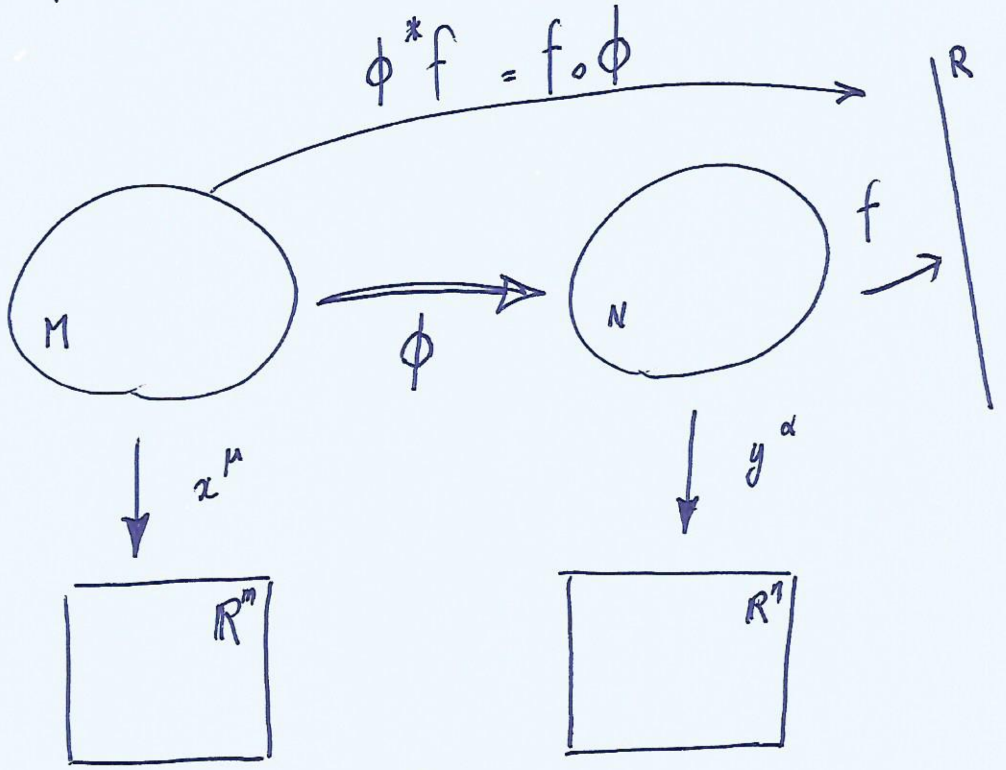
در ادامه بحث خمینه‌ها و برای تعریف دقیق‌تر مشتق لی و جبر لی از ارتباط بین دو خمینه شروع می‌کنیم. فرض کنید که دو خمینه M، N را با ابعاد متفاوت داشته باشیم.

(شکل ۱)



مختصات خمینه M، N به ترتیب x^μ، y^α است. نگاشت $\phi: M \to N$ و تابع $f: N \to R$ را طبق شکل تعریف می‌کنیم. ϕ و f را می‌توان ترکیب کرد که نگاشت $(f\circ\phi): M \to R$ را تعریف کرد. این نگاشت را به اسم pullback به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\phi^* f = (f\circ\phi) \quad (1)$$

ϕ^* نگاشتی است که تابع f را از N به M برمی‌گرداند.

همواره می‌توانیم توابع را pullback کرد. اگر تابع g به صورت $g: M \to R$
وجود داشته باشد، می‌توانیم با ترکیب با ϕ، تابعی روی N تعریف کرد.

البته مکمل مشتق گیری می‌تواند یک تابع پیوسته را به اعداد حقیقی ببرد. این امکان اجازه خواهد
داد که بکمک push forward را تعریف کنیم.

اگر $V(p)$ بردار در نقطه p روی خمینه M باشد، بردار push forward $\phi_* V$ را
در نقطه $\phi(p)$ بر روی N به صورت زیر تعریف کنیم.

$$(2) \qquad \underbrace{(\phi_* V) f}_{\text{بردار push forward}} = \underbrace{V(\phi^* f)}_{\text{عمل بردار } V \text{ بر روی تابع pullback تابع } f}$$

بالا اندیس $*$ به معنای pullback است و زیر اندیس به معنا push forward است.
البته این نمادگذاری در ادبیات نسبیت عام متفاوت است و باید در آن دقت شود.

برای مثال از این رابطه مجرد. فرض کنید که V به عنوان موجود هندسی بر اساس پایه‌های مختصاتی
M، $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ نوشته شده باشد و در خمینه N با پایه‌های فضا $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$

در نتیجه رابطه (2) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(3) \qquad \underbrace{(\phi_* V)^\alpha}_{\text{push forward vector}} \partial_\alpha f = V^\mu \partial_\mu (\phi^* f) = V^\mu \partial_\mu (f \circ \phi) = V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \partial_\alpha f$$

رابطه فوق، راهنمای آن است که push forward operation، ϕ_* را به صورت ماتریس نشان دهیم.

$$(\phi_* V)^\alpha = (\phi_*)^\alpha{}_\mu = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \qquad (4)$$

در نتیجه push forward یک بردار تک شبیه قوانین تبدیل مختصات است.

البته باید توجه داشت که M, N دو خمینه متفاوت هستند.

بردارها را می‌توان از خمینه M به N، push forward کرد و همواره نمی‌توان pullback کرد. جالب این که برای فرم‌ها forms که دوگان بردارها هستند، pullback همواره قابل انجام است ولی push forward خیر!

باید توجه داشت که فرم‌ها نگاشت‌های خطی از بردارها به اعداد حقیقی هستند. pullback یک فرم در خمینه N را می‌توان بر اساس عمل آن بر روی بردار V بر روی خمینه M فهمید.

در نتیجه:

$$(\phi^* w) V = w(\phi_* V) \qquad (5)$$

pull back of a form on a vector V

شکل ماتریسی یا مولفه‌های $\phi^* w$ به این صورت است.

$$(\phi^* w)_\mu = (\phi^* w)_\mu{}^\alpha \, w_\alpha \qquad (6)$$

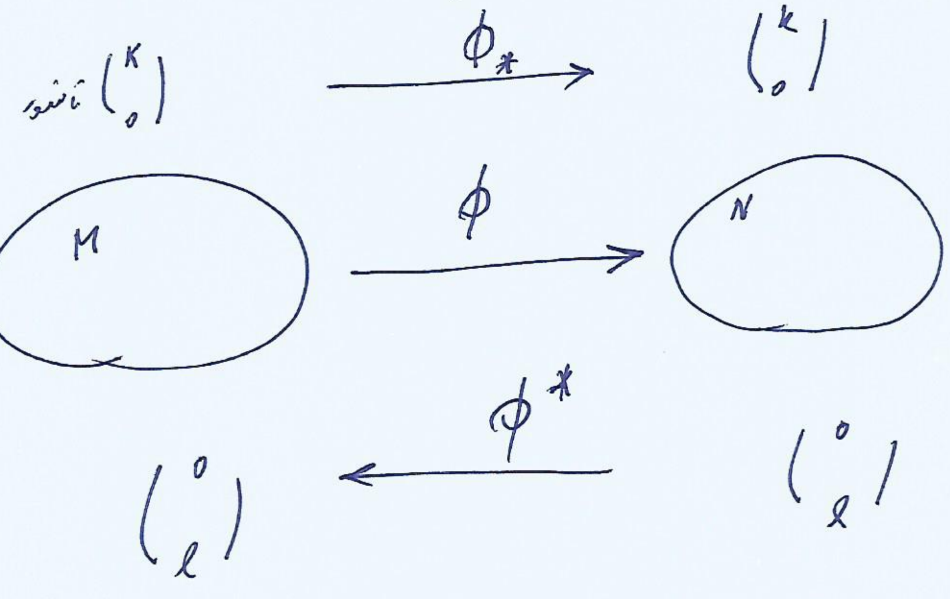
که روابط فوق pullback را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(\phi^*)_\mu{}^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \qquad (7)$$

حال به تعریف تانسورها برخواهیم گشت. تانسور مرتبه rank، $(0,l)$ دارای l زیر اندیس و بدون اندیس بالا است. این تانسور نگاشت خطی از ضرب l بردار به مجموعه اعداد حقیقی است در نتیجه می‌توان pull-back یک تانسور با مرتبه دلخواه را به صورت زیر تعریف کرد.

$$(8) \qquad \underbrace{(\phi^* \underbrace{T}_{\text{تانسور مرتبه } (0,l)})}_{\text{pullback}}(V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(l)}) = T(\phi_* V^{(1)}, \phi_* V^{(2)}, \dots, \phi_* V^{(l)}).$$

شکل زیر به صورت شکل واره نشان می‌دهد که چگونه رابطه بالا عمل می‌کند.



(شکل 2

در رابطه (8) - تانسور $(0,l)$: $T_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}$ بر روی N تعریف شده است.

به طور مشابه می توانیم یک تانسور مرتبه $(K,0)$. K بالا اندیس و بدون زیر اندیس را push forward کنیم. این عمل با pull-back بر روی فرم ها انجام می شود.

$$(\phi_* S)\left(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(k)}\right) = S\left(\phi^*\omega^{(1)}, \phi^*\omega^{(2)}, \ldots, \phi^*\omega^{(k)}\right) \tag{9}$$

نمایش ماتریسی pullback کمک می کند که $(\phi^*)_\mu{}^\alpha = \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$ ، $(\phi_*)^\alpha{}_\mu = \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$

تانسور مرتبه $(0,l)$ و push forward تانسور مرتبه $(K,0)$ به صورت زیر بنویسیم.

$$(\phi^* T)_{\mu_1 \ldots \mu_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_l}}{\partial x^{\mu_l}} T_{\alpha_1 \ldots \alpha_l} \tag{10}$$

$$(\phi_* S)^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} S^{\mu_1 \ldots \mu_k} \tag{11}$$

مثال: برای درک دقیق تر روابط مجردی که تاکنون بحث کردیم این مثال را در نظر بگیرید.

فرض کنید S^2 به نام M را در خمینه N که $\mathbb{R}^3$ انتخاب کرده ایم، محصور کنید.

اگر مختصات $x^\mu = (\theta, \phi)$ را بر روی $M = S^2$ و $y^\alpha = (x, y, z)$ را بر روی $N = R^3$ انتخاب کنید نگاشت $\phi : M \to N$ را به صورت زیر انتخاب می کنیم.

$$\phi(\theta, \phi) = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \tag{12}$$

6/

نحوه‌ی S^2 که در $\mathbb{R}^3$ ، متریکی را بر روی کره القاء می‌کند. این متریک pull-back متریک فضا-زمان تخت است. به صورت ساده انگارانه می‌توان متریک $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ را انتخاب کرد و با جایگذاری رابطه (12) در این متریک خواهیم داشت.

$$
\begin{aligned}
(13)\quad ds^2 &= \left(\cos\theta\cos\phi\, d\theta + \sin\theta(-\sin\phi)\, d\phi\right)^2 \\
&+ \left(\cos\theta\sin\phi\, d\theta + \sin\theta\cos\phi\, d\phi\right)^2 \\
&+ \left(-\sin\theta\, d\theta\right)^2 \\
&= \left(\cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\right) d\theta^2 + \left(\sin^2\theta\sin^2\phi \right. \\
&\left. + \sin^2\theta\cos^2\phi\right) d\phi^2 \cancel{- 2\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi\, d\theta\, d\phi} \\
&\cancel{+ 2\cos\theta\sin\theta\sin\phi\cos\phi\, d\theta\, d\phi}
\end{aligned}
$$

$$
ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2
$$

که رابطه (13) همان متریک روی S^2 است. برای ارتباط با بحث قبل ماتریس تبدیل $\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$ را به شکل زیر تشکیل می‌دهیم.

$$
(14)\quad \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} = \begin{array}{c l}
\begin{pmatrix}
\cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\
 & & \\
-\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l}
\rightarrow \text{سطر 1 مشتق نسبت به } \theta \\
\\
\text{سطر 2 مشتق نسبت به } \phi
\end{array}
\end{array}
$$

حال متریک S^2 به راحتی از pull-back متریک R^3 بدست می آید

$$(\phi^* g)_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} \qquad (15)$$

به طور مثال مولفه θ,θ

$$(\phi^* g)_{11=\theta\theta} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\theta}\cdot\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\theta} g_{\alpha\beta} \qquad (16)$$

$$= \frac{\partial y^x}{\partial x^\theta}\cdot\frac{\partial y^x}{\partial x^\theta} g_{xx} + \frac{\partial y^y}{\partial x^\theta}\cdot\frac{\partial y^y}{\partial x^\theta} g_{yy} + \frac{\partial y^z}{\partial x^\theta}\frac{\partial y^z}{\partial x^\theta} g_{zz}$$

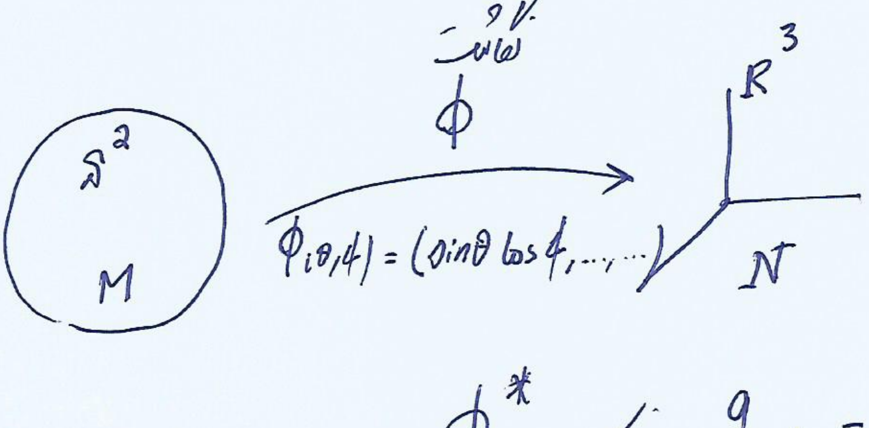
$$= \cos^2\theta\cos^2\phi(1) + \cos^2\theta\sin^2\phi(1) + (-\sin\theta)^2(1) = 1$$

و به همین ترتیب اگر بقیه مولفه ها را محاسبه کنیم خواهیم داشت.

$$(\phi^* g)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (16)$$

شکل شماتیک زیر نشان دهنده فرایند انجام شده است.

(شکل 3)



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} = g_{\mu\nu} \xleftarrow[\text{pull back}]{\phi^*} g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

حال در ادامه فرض می‌کنیم که M , N هر دو یک خمینه باشند. در حالت کلی نگاشت $\phi: M \to N$ وجود دارد. درصورتی که ϕ , ϕ^{-1} هر دو وجود داشته باشند و نگاشت‌ها هموار باشند، آنگاه بین M, N می‌توانیم diffeomorphism تعریف کنیم

این اتفاق زمانی می‌افتد که M, N خمینه مجرد یکسان باشند.

وجود این diffeomorphism به معنی تعریف یکسان دو خمینه است. نکته مهم این است که با ϕ, ϕ^{-1} می‌توان تانسورها را push-forward یا pull-back انجام داد.

برای تانسور $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l}$ روی خمینه M، push forward انجام دهیم.

$$(\phi_* T)\left(w^{(1)}, \dots, w^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}\right) = T\left(\phi^* w^{(1)}, \dots, \phi^* w^{(k)}, [\phi^{-1}]_* V^{(1)}, \dots, [\phi^{-1}]_* V^{(l)}\right) \tag{17}$$

که $w^{(i)}$ ها 1-فرم‌هایی هستند که روی N تعریف شده‌اند، $V^{(i)}$ ها بردارهای روی N هستند. اگر مولفه‌های رابطه (17) را بنویسیم خواهیم داشت

$$(\phi_* T)^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}{}_{\beta_1 \cdots \beta_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \cdot \underbrace{\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial y^{\beta_l}}}_{\text{معکوس تبدیل}} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \tag{18}$$

وجود تبدیل معکوس $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\beta}}$ قابل استفاده است چون ϕ معکوس پذیر است.

نقطه مهم بعدی این که ϕ^* pullback همان push forward با نگاشت معکوس است $[\phi^{-1}]_*$

حال به بررسی ارتباط بین تبدیل مختصات و تبدیل diffeomorph می‌پردازیم.

فرض کنید که خمینه M با دستگاه مختصات x^{μ} داشته باشیم $x^{\mu}: M \to R^n$

حال برای تبدیل مختصات می‌توانیم خمینه را ثابت فرض کنیم و تبدیل مختصات جدید $y^{\mu}: M \to R^n$ تعریف کنیم (Keep manifold fixed, change coordinate maps.)

یا می‌توان diff. تعریف کرد.

$$\phi: M \to M$$

که در این صورت مختصه‌ها pullback خواهد بود.

(19) $$\left(\phi^* x\right)^{\mu}: M \to R^n$$

(move the points on manifold and then evaluate the coordinate of new points.)

این داستان بسیار شباهت دارد به دو دیدگاه تبدیل مختصات فعال active (که در این حالت تبدیل diff. است) و تبدیل مختصات غیرفعال passive (که در این حالت تبدیل مختصات است.)

حال نکته بسیار مهم آن‌جاست که diff. این امکان را می‌دهد که تانسورها را بر روی خمینه pull-back و push-forward کنیم. امکان مقایسه‌ها این موجودات بر روی خمینه امکان‌پذیر می‌شود.

به طور مشخص اگر diff. نگاشت $\phi : M \to M$ را داشته باشیم می‌توانیم میدان تانسوری $T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x)$ را فرض کنید اختلاف آن را در نقطه P و همچنین pull-back آن را که به صورت زیر تعریف می‌شود را در همان نقطه محاسبه کنیم.

$$\phi^* \left[T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}(\phi(p)) \right] \qquad (20)$$

این بدین معناست که می‌توانیم مشتق دیگری را بر روی تانسورها تعریف کنیم که از جریان تانسور با diff. به دست آمده است.

این موضوع بحث ما در جلسات آینده بحث مشتق لی خواهد بود.

مسیر کلی گذر ولی به سمت تعریف تانسور خمش است.

پایان درس.