نسبیت عام نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹ ۱۳۹۹/۱/۲۴

در جلسه قبل تانسور انرژی تکانه را معرفی کردیم و قوانین پایستگی را به دست آوردیم. یک سؤال می‌تواند این باشد که شکل انتگرالی این قوانین پایستگی چیست؟ برای جواب به سؤال می‌توانیم موجودات ریاضی جدیدی به نام فرم‌های دیفرانسیلی را (differential forms یا برای سادگی فرم‌ها forms) را تعریف کنیم.

فرم‌ها دسته‌ای از تانسورها هستند. فرم‌های دیفرانسیلی p، تانسورهای رتبه $(0-p)$ هستند که به صورت کامل پادمتقارنند. از این رو اسکالرها، بردارها - صفرفرم و یک فرم هستند. (توجه داشته باشید بردارهای که در کاشد V_μ). تانسور لوی چویتا نیز فرم است.

فضای تمام p-فرم‌ها را Λ^p نشان می‌دهیم و فضای تمام میدان‌های p-فرم که بر روی خمینه M تعریف می‌شوند را با $\Lambda^p(M)$ نشان می‌دهند. تعداد p-فرم‌های مستقل در یک فضای n-بعدی برابر است با

$$\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

در نتیجه برای یک نقطه در خمینه M

در 4 بعد، دارای یک 0-فرم، چهار 1-فرم، شش ۲-فرم، چهار ۳-فرم و یک ۴-فرم تعریف کرد. p-فرم‌های بالاتر از n وجود ندارد.

فرم‌ها بدون استفاده از ساختار هندسی اضافی می‌توانند مشتق یا انتگرال گرفته شوند.

حال با داشتن یک p-فرم A و یک q-فرم B، می‌توانیم یک p+q-فرم

به نام ضرب وج wedge product $A\wedge B$ به شکل زیر تعریف کرد.

$$(1)\qquad (A\wedge B)_{\mu_1\cdots\mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!\,q!} A_{[\mu_1\cdots\mu_p} B_{\mu_{p+1}\cdots} B_{\mu_{p+q}]}$$

به طور مثال ضرب وج دو عدد 1-فرم به شکل زیر است.

$$(2)\qquad (A\wedge B)_{\mu\nu} = 2A_{[\mu}B_{\nu]} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu$$

با این تعریف خواهیم داشت.

$$(3)\qquad A\wedge B = (-1)^{pq}\, B\wedge A$$

در نتیجه ضرب وج را با دقت در مورد علامت می‌توان جابه‌جا کرد.

حال ضرب خارجی exterior derivative "d" را روی p-فرم‌ها تعریف می‌کنیم تا میدان‌های p+1 -فرم داشته باشیم. حال مشتق را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(4)\qquad (dA)_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = (p+1)\,\partial_{[\mu_1} A_{\mu_2\cdots\mu_{p+1}]}$$

مثال ساده در این است که ضرب خارجی یک صفر-فرم است

$$(5)\qquad (d\phi)_\mu = \partial_\mu \phi$$

ضرب خارجی شکل تعمیم یافته قانون لایبنیتس را رعایت می‌کند.

اگر ω یک p-فرم، η یک q-فرم باشد، آنگاه

$$d(\omega\wedge\eta) = (d\omega)\wedge\eta + (-1)^{p}\,\omega\wedge d\eta \tag{6}$$

p - از این فرم اول را به همراه دارد.

نکته مهم در مورد ضرب خارجی این است که این کمیت به صورت تانسور تعریف شده است. (برخلاف مشتق جزئی)

این اثبات تمرین درس است. نکته جالب توجه دیگر این است که $d(dA) = 0$

دلیل این صفر بودن این است که مشتق جزئی جابه‌جا می‌شود $\partial_\alpha \partial_\beta = \partial_\beta \partial_\alpha$

اگر $dA = 0$ باشد p-فرم A را بسته closed گویند.

اگر $A = dB$ که A یک p-فرم و B یک $p-1$ فرم باشد A را دقیق exact گویند.

توجه داشته باشید که تمام فرم های exact، بسته closed نیز هستند ولی عکس خیر.

Hodge duality

محاسبه دیگری که بر روی فرم های دیفرانسیلی عمل می‌کند دوگان هاج است. اپراتور هاج ستاره Hodge star را بر روی یک خمینه n-بعدی به صورت یک نگاشت از p-فرم ها به $(n-p)$-فرم تعریف می‌کنیم.

$$(*A)_{\mu_1\cdots\mu_{n-p}} = \frac{1}{p!}\,\epsilon^{\nu_1\cdots\nu_p}{}_{\mu_1\cdots\mu_{n-p}}\,A_{\nu_1\cdots\nu_p} \tag{7}$$

4,

که A را به دوگان A می‌نگاریم. $\epsilon^{\nu_1 \cdots \nu_p}{}_{\mu_1 \cdots \mu_{n-p}}$ تانسور لوی چویتا است که در همین

درس نامه به آن خواهیم پرداخت. به طور واضح این عملگر (هاج استار) به ترکیب فضا - زمان

ارتباط دارد زیرا اندیس‌های ϵ بعد یابی (هم‌وردا یا پادوردا) هستند.

قبل از ارائه در مورد Hodge-star به بررسی تانسور لوی چویتا Levi-Civita tensor

می‌پردازیم. نماد لوی چویتا Levi-Civita symbol که گاهی با دست راست آن را

به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

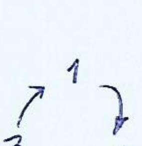
$$(8) \quad \tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \begin{cases} +1 & \text{if } \mu_1\mu_2\cdots\mu_n \text{ even permulation} \\ -1 & \text{if } \mu_1\mu_2\cdots\mu_2 \text{ odd permulation} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(9)

$$\epsilon_{123} = -\epsilon_{321}$$

$$\underset{1}{\epsilon_{123}} = \underset{2}{\epsilon_{213}} = \underset{3}{\epsilon_{231}} = \epsilon_{321} \qquad \text{odd permulation}$$

- جابه‌جایی‌های فرد علامت منفی دارد. شمارش جابه‌جایی برای نماد لوی چویتاهای بالاتر

درست است روابط سیکلی  در 3D کاربرد دارد.

مقادیر نماد لوی چویتا در هر دستگاه مختصات یکسان است حداقل در دستگاه مختصات راستگرد

right-handed coordinate.

واضح است که نماد لوی چویتا، نماد است و تانسور نیست، چون تحت تبدیل مختصات شبیه تانسورها رفتار نمی‌کند. تنها در دستگاه مختصات تخت (مینکوفسکی) می‌توانیم این نماد را تانسور در نظر بگیریم

اما در حالت دلخواه می‌توانیم از تعریف دترمینان ماتریس $n\times n$ استفاده کنیم

از این رو $|M|$، دترمینان ماتریس M^{μ}_{ν} به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{\epsilon}'_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}\,|M| = \tilde{\epsilon}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}\,M^{\nu_1}_{\mu_1}M^{\nu_2}_{\mu_2}\dots M^{\nu_n}_{\mu_n} \tag{10}$$

رابطه فوق هم ارز است با تعریف استاندارد دترمینان با استفاده از تعریف cofactors ها. حال اگر $M^{\nu}_{\mu} \equiv \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}$ تعریف کنیم خواهیم داشت

$$\tilde{\epsilon}'_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \left|\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right|\,\tilde{\epsilon}_{\nu_1\dots\nu_n}\,\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\mu_2}}\dots\frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x'^{\mu_n}} \tag{11}$$

که از این نکته که $\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}$ معکوس ماتریس $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}$ است استفاده کرده‌ایم و این نکته که دترمینان ماتریس معکوس با معکوس دترمینان برابر است $|M^{-1}| = |M|^{-1}$. در نتیجه نماد لوی چویتا همانند تانسور تبدیل می‌شود البته بدون دترمینان جلوی آن.

به چنین موجوداتی که با دترمینان تبدیل "Jacobian" تبدیل می‌شوند چگالی تانسور می‌گویند.

یک نمونه دیگر از چگالی تانسورها، دترمینان متریک است $g = |g_{\mu\nu}|$
که تحت تبدیل مختصات به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$g(x'^{\mu}) = \left|\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right|^{-2} g(x^{\nu}) \qquad (12)$$

از این رو به دترمینان متریک، چگالی اسکالر با وزن 2- می‌گویند. (چگالی تانسور مرتبه صفر با وزن
-2 weight)

از این رو نماد لوی‌چویتا چگالی تانسور با وزن 1+ است.

حال با یک روش ساده می‌توانیم چگالی تانسورها را به تانسور تبدیل کنیم، آن با ضرب $|g|^{w/2}$ است که w، وزن چگالی تانسور است. قدر مطلق نیز لازم است چون علامت دترمینان متریک‌های لورنتسی منفی است. در نتیجه می‌توانیم تانسور لوی‌چویتا را Levi-Civita tensor را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \sqrt{|g|}\;\tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \qquad (13)$$

نمونه دیگر از نماد لوی‌چویتا تعریف می‌شود که به صورت زیر است

$$\tilde{\epsilon}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \mathrm{sgn}(g)\;\tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \qquad (14)$$

که دارای وزن (1-) است.

تانسور مربوط به این نماد به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\tilde{\epsilon}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \qquad (15)$$

حال می‌رسیم به تعریف Hodge-*

$$(*A)_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-p}} = \frac{1}{p!}\,\epsilon^{\nu_1\cdots\nu_p}{}_{\mu_1\cdots\mu_{n-p}}\,A_{\nu_1\cdots\nu_p} \qquad (16)$$

این تعریف بستگی به متریک دارد، زیرا برای بالا و پایین بردن اندیس‌ها، احتیاج به متریک داریم.

تمرین: نشان دهید که استفاده دوباره از Hodge-* رابطه زیر را به دست می‌دهد

$$**A = (-1)^{s+p(n-p)}A \qquad (17)$$

که s تعداد ویژه مقادیر متریک با علامت منفی است

الکترودینامیک یک مثال بسیار معروف از استفاده فرم‌ها در فیزیک است

با توجه به تعریف تانسور شدت الکترومغناطیس $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ رابطه Closure وجود دارد

$$dF = 0 \qquad (18)$$

از تعریف دیگر d (exterior derivative)، F دقیق exact نیز هست

$$F = dA \qquad (19)$$

۱-فرم پتانسیل برداری الکترومغناطیسی است که مولفه صفر آن پتانسیل اسکالر است $A_0 = \phi$
پیمانه ناوردا بودن بدین ترتیب است $A \to A + d\lambda$ رابطه (19) را تغییر نمی‌دهد
λ یک ۰-فرم است. معادله ماکسول به صورت زیر به دست می‌آید.

$$d(*F) = *J \qquad (20)$$

با مقایسه دو رابطه (18)، (20) با فرض $J_\mu = 0$ معادلات تحت "duality transformation"

$$F \to *F \qquad (21)$$
$$*F \to -F$$

درنتیجه نظریه ماکسول در خلاء duality invariant است. درحالی که ناوردایی در حضور بار از بین می‌رود. اگر بار مغناطیسی J_M وجود داشت. می‌توانستیم رابطه (18) را به صورت $dF = *J_M$ بنویسیم. درنتیجه دوگانی با اضافه کردن تبدیل $J \leftrightarrow J_M$ برخواهد گشت. ارتباط بین فضاهای دوگان به شکل فوق و بررسی نظریه در جفت شدگی قوی و جفت شدگی ضعیف جالب خواهد بود. یکی از مثال های جالب محبوس شدگی کوارک ها در هادرون است.

□ انتگرال در خمینه‌ها

از به خاطر داشته باشید در انتگرال گیری‌ها R^n، ژاکوبی تبدیل در دیفرانسیل حجم n-بعدی ظاهر می‌شد.

$$d^n x' = \left|\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\mu}}\right| d^n x \tag{22}$$

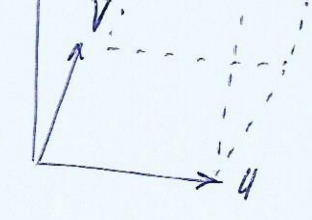
انتگرال گیری در خمینه n-بعدی، انتگرالده باید n-فرم شناخته می‌شود.

انتگرال n-بعدی بر روی ناحیه $\Sigma \subset M$ یک نگاشت از n-فرم‌های W به اعداد حقیقی است

$$\int_{\Sigma} : W \to R \tag{23}$$

برای درک این گزاره احتیاج به کمی شهود داریم. انتگرال‌ها به صورت کلی به صورت $\int f(x)\, d\mu$ گرفته می‌شود که $d\mu$ المان حجم است. المان حجم از ضرب بردارها درست می‌شود در نتیجه "rectangular parallelepiped"

$$d\mu(\underset{\text{بردار}}{U}, \underset{\text{بردار}}{V}, \underset{\text{بردار}}{W}) \in R \tag{24}$$



المان حجم

در نتیجه دیفرانسیل المان حجم شبیه یک تانسور $(0,n)$ عمل می‌کند

حال واضح است که این حجم چرا باید پادمتقارن باشد.

پاد متقارن است، چون جابجایی یا آینه کردن هر بردار علامت المان را عوض می کند
از این رو المان حجم را می توان با ضرب وج به صورت زیر نوشت

$$d^n x = \underbrace{dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}}_{\text{هموردای تانسوری است}} \tag{25}$$

توجه داشته باشید که رابطه بالا تانسور نیست که اگر توابع f و g بر روی خمینه تعریف شده باشند، df ، dg یک-فرم، $df \wedge dg$ ، ۲-فرم است درحالی که dx^0 ، dx^1 ، ... ، dx^{n-1} مختصه هستند. حال با یک تعریف می توانیم رابطه (25) را به صورت زیر بنویسیم.

$$dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = \frac{1}{n!}\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} \tag{26}$$

توجه کنید که نماد لوی چیویتا در هر دستگاهی تغییر نمی کند درحالی که ۱-فرم به صورت $dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$ تبدیل می شود. آنگاه

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} = \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x'^{\nu_n}} \times dx'^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx'^{\nu_n} = \underbrace{\left|\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right|}_{\text{حال طبق تعریف دترمینان}} \tilde{\epsilon}_{\nu_1 \dots \nu_n} dx'^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx'^{\nu_n} \tag{27}$$

حال با توجه به تعاریف

(28)
$$\begin{cases} d^n x = dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \\ dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = \frac{1}{n!} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} \\ d^n x' = \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| d^n x \end{cases}$$

و رابطه تبدیل (27) خواهیم داشت

حال می‌توانیم المان ناوردای حجم را با ضرب $\sqrt{|g|}$ به صورت زیر درست کنیم.

(29)
$$\sqrt{|g'|}\, dx'^0 \wedge \dots \wedge dx'^{(n-1)} = \sqrt{|g|}\, dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$$

که به صورت اختصاری $\sqrt{|g|}\, d^n x$ نشان می‌دهیم

(30)
$$\sqrt{|g|}\, d^n x \equiv \sqrt{|g|}\, dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$$

خیلی جالب است که دوباره ببینیم که المان حجم موجود همانند تانسور لوی چیویتا است بدین صورت که

(31)
$$\epsilon \equiv \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_n}$$

به صورت یک n-فرم نوشته شده است. ضرب تانسوری می‌تواند به ضرب wedge تبدیل شود.

(32)
$$\epsilon = \frac{1}{n!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$$

حال با استفاده از تعریف چگالی تانسور (نماد لوی چیویتا) داریم.

$$\epsilon = \frac{1}{n!}\,\tilde{\epsilon}_{\mu_1\cdots\mu_n}\sqrt{|g|}\;dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n} \qquad (33)$$

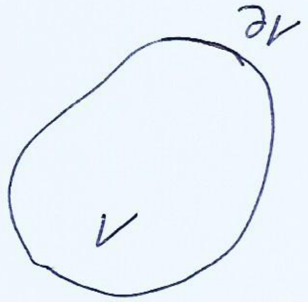
$$= \sqrt{|g|}\;dx^0\wedge\cdots\wedge dx^{n-1} \equiv \sqrt{|g|}\;d^n x$$

در نتیجه انتگرال یک موجود اسکالر بر روی n-منیفلد به صورت زیر است.

$$(34) \qquad I = \int \phi(x)\sqrt{|g|}\;d^n x = \int \phi(x)\,\epsilon$$

حال می‌توانیم قانون گاوس را در نسبیت عام بنویسیم.

$$(35) \qquad \oint_{\partial V} \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{s}}_{\text{المان سطح}} = \int (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,dV$$



حال به صورت فرم‌ها می‌نویسیم، توجه داشته باشید که انتگرال‌گیری در سطح فرم‌های 1 است

$$(36) \qquad \int_{\partial V} E_x \underbrace{dy\wedge dz}_{dS_x} + E_y \underbrace{dz\wedge dx}_{dS_y} + E_z \underbrace{dx\wedge dy}_{dS_z}$$

$$= \int_V dE_x\wedge dy\wedge dz + dE_y\wedge dz\wedge dx + dE_z\wedge dx\wedge dy$$

Stokes theorem.

نکته جالب این است که $dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz$

ولی $dx \wedge dx = 0$ و بقیه ترم هایی که ضرب وج تکراری دارند. از این رو رابطه (36) برابر خواهد شد با

$$(37) \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \frac{\partial E}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \int_V \frac{\partial E}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \int_V \frac{\partial E}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy$$

از آنجایی که ترم ۲ و ۳ چرخش (x,y,z) صحیح را دارد، از آن فاکتور گرفت

$$(38) \quad \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \; dx \wedge dy \wedge dz = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

در نتیجه

$$(39) \quad \int_V \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}} \, d^4x = \int_{\partial V} T^{\mu\alpha} \, d^3x = 0$$

« پایان درس »