نسبیت عام . نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹ ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۹

* The Maximally extended Schwarzschild Solution . راه حل شوارتزشیلد - جواب بیشینه

در جلسه ادینگتون - فینکلشتاین با انتخاب دستگاه مختصات مناسب (v, r) توانستیم مشکل افق $r = 2GM$ را حل کنیم. این بدین معنا است که یک ناظر و ذره متوجه زمان عبور از افق سیاهچاله نمی‌شود.

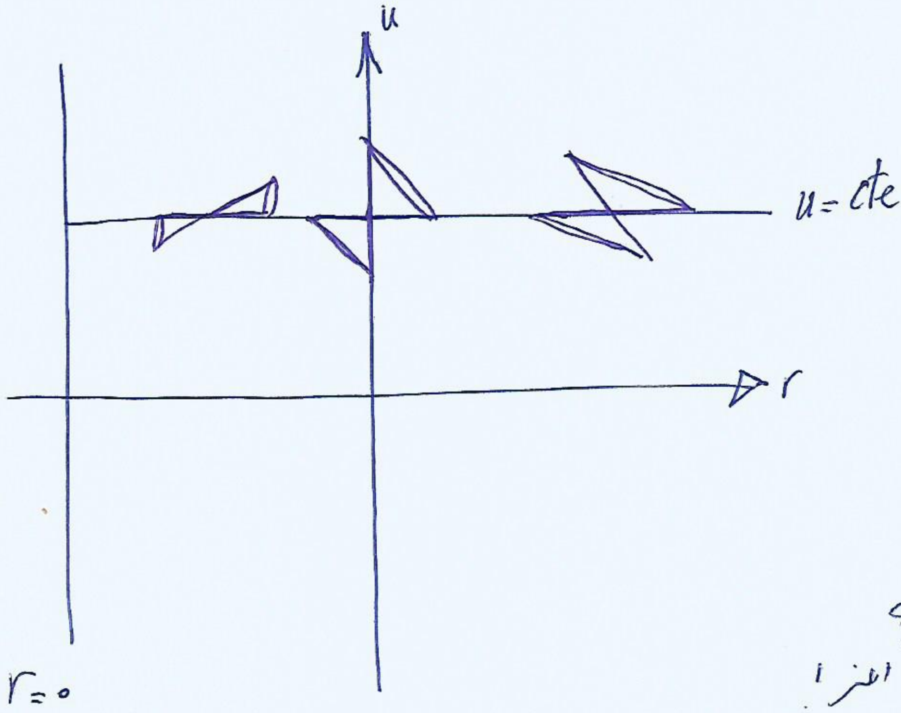
حال با این تغییر مختصات $r \leq 2GM$ را نیز در داخل منطقه خود داریم و قابل مطالعه است.

آیا شوارتزشیلد گسترش دیگری نیز دارد؟ بله!

اگر جواب ها (تغییر متغیر) (u, r) را در نظر بگیریم یک ترکیب برابر خواهد بود با

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du^2 - (du\,dr + dr\,du) + r^2 d\Omega^2 \qquad (1)$$

در این صورت مجدد می‌توانیم از افق عبور کنیم ولی در جهت گذشته مخروط نوری (مطابق شکل ۱)



(شکل ۱)

نتیجه حیرت انگیز!

$$(2)\quad \begin{cases} v = t + r^{*} \\ u = t - r^{*} \end{cases}$$

با توجه به تعریف بالا اگر $v = cte$ ، r را کاهش دهیم $t \to +\infty$

اگر $u = cte$ ، r را کاهش دهیم $t \to -\infty$

در نتیجه فضا-زمان را در دو جهت گسترش داده‌ایم. در جهت آینده و گذشته!

در ادامه با مطالعه مسیرهای فضاگونه، نواحی بیشتری از فضا زمان را در اختیار ما قرار دهد.

در نتیجه می‌توانیم همزمان از مختصه u و v استفاده کنیم.

$$(3)\quad \begin{cases} dv = dt + dr^{*} \\ du = dt - dr^{*} \end{cases} \;\rightarrow\; dt = \frac{1}{2}(dv + du) \;\&\; dr^{*} = \frac{1}{2}(dv - du)$$

$$dt^2 = \frac{1}{4}\left(dv^2 + du^2 + 2\,dv\,du\right)$$

$$dr^{*} = \frac{1}{4}\left(dv^2 + du^2 - 2\,dv\,du\right)$$

از این رو متریک در مختصه tortoise به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$(4)\quad ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(-dt^2 + dr^{*2}\right) + r^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left[\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\cancel{dv^2} + \cancel{du^2} + 2dvdu - \cancel{dv^2} - \cancel{du^2} + 2dvdu\right)\right] + r^2 d\Omega^2$$

در نتیجه

$$(5)\quad ds^2 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(dv\,du + du\,dv\right) + r^2 d\Omega^2$$

3,

که مختصه r به صورت ضمنی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$(6) \qquad \frac{1}{2}(v-u) = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)$$

حد و داستان در پی متناهی بودن $r = 2GM$، خود را در
$$\begin{cases} u \to +\infty \\ v \to -\infty \end{cases}$$
نشان می‌دهد.

ادامه داستان ... تغییر مختصاتی است که u, v را به کمیت‌هایی با مقادیر متناهی بیاورد.

$$(7) \qquad \begin{cases} v' = e^{v/4GM} \\ u' = e^{-u/4GM} \end{cases}$$

که می‌توان بر اساس مختصه‌های اولیه (t,r) نوشت

$$(8) \qquad \begin{cases} v' = e^{\frac{1}{4GM}(t+r^*)} \\ r^* = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \end{cases} \Rightarrow v' = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{(t+r)/4GM}$$

به جای اشاره $\qquad (9) \qquad u' = -\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) e^{(r-t)/4GM}$

حال در مختصه (v', u', θ, ϕ) تانسور متریک شوارتزشیلد به صورت زیر خواهد بود.

$$(10) \qquad ds^2 = -\frac{16G^3M^3}{r} e^{-r/2GM}\left(dv'du' + du'dv'\right) + r^2 d\Omega^2$$

رفتار غیر تکین $r = 2GM$ در این تانسور مشهود است

در نتیجه ویژگی تخت بودن ترکیب در این نوع مختصات به وضوح دیده می‌شود.

در دستگاه مختصات جدید u' ، v' هر دو پوچ هستند (Null) زیرا $\partial/\partial v'$ ، $\partial/\partial u'$ نیز پوچ هستند

ترکیب (دو بردار پوچ + دو بردار فضاگونه) می‌توانند مختصات متعامد فضای tangent را

ایجاد کنند. البته ما با (یک بردار زمان گونه + سه بردار فضاگونه) راحتیم از این رو

تبدیل مختصات جدیدی را تعریف می‌کنیم

b - الف $$T = \frac{1}{2}(v'+u') = \left(\frac{r}{2GM}-1\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right)$$

b - ب $$R = \frac{1}{2}(v'-u') = \left(\frac{r}{2GM}-1\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right)$$

با این تغییر مختصات متریک به شکل زیر خواهد بود.

(7) $$\boxed{ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM}\left(-dT^2 + dR^2\right) + r^2 d\Omega^2}$$

که مختصه r به صورت ضمنی از رابطه زیر به دست می‌دهد.

(8) $$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right) \exp\left(r/2GM\right)$$

که مختصه (T, R, θ, ϕ) به مختصه کروسکال "Kruskal Coordinate"

Kruskal- Szekres coordinate.

چند نکته قابل توجهی برای ترسیم Kruskal وجود دارد . منحنی ها پوچ همانند فضای تخت است .

(9) $$T = \pm R + cte$$

نکته جالب دیگر این است که برخلاف مختصه (t, r^*) ، افق در بی نهایت نیست بلکه

(10) $$r = 2GM \rightarrow T = \pm R \quad (\text{Null Surface})$$

و این ابر سطح محدود در این مختصه نیز پوچ است . سپس می توانیم سطوح $r = cte$, $t = cte$ را بدست بیاوریم .

(11) $$r = \text{constant} \rightarrow T^2 - R^2 = \text{constant}$$

هذلولی در صفحه $(T-R)$

(12) $$t = \text{constant} \quad T/R = \tanh\left(t/4GM\right)$$

که خطوط راستی را در صفحه $(T-R)$ توصیف می کنند با شیب $\tanh\left(t/4GM\right)$

توجه داشته باشیم که $t \rightarrow \pm\infty$ رابطه 12 به $T = \pm R$ میل می کند .

در نتیجه زمان $t = \pm\infty$ ابر سطح $r = 2GM$ را نشان می دهد .

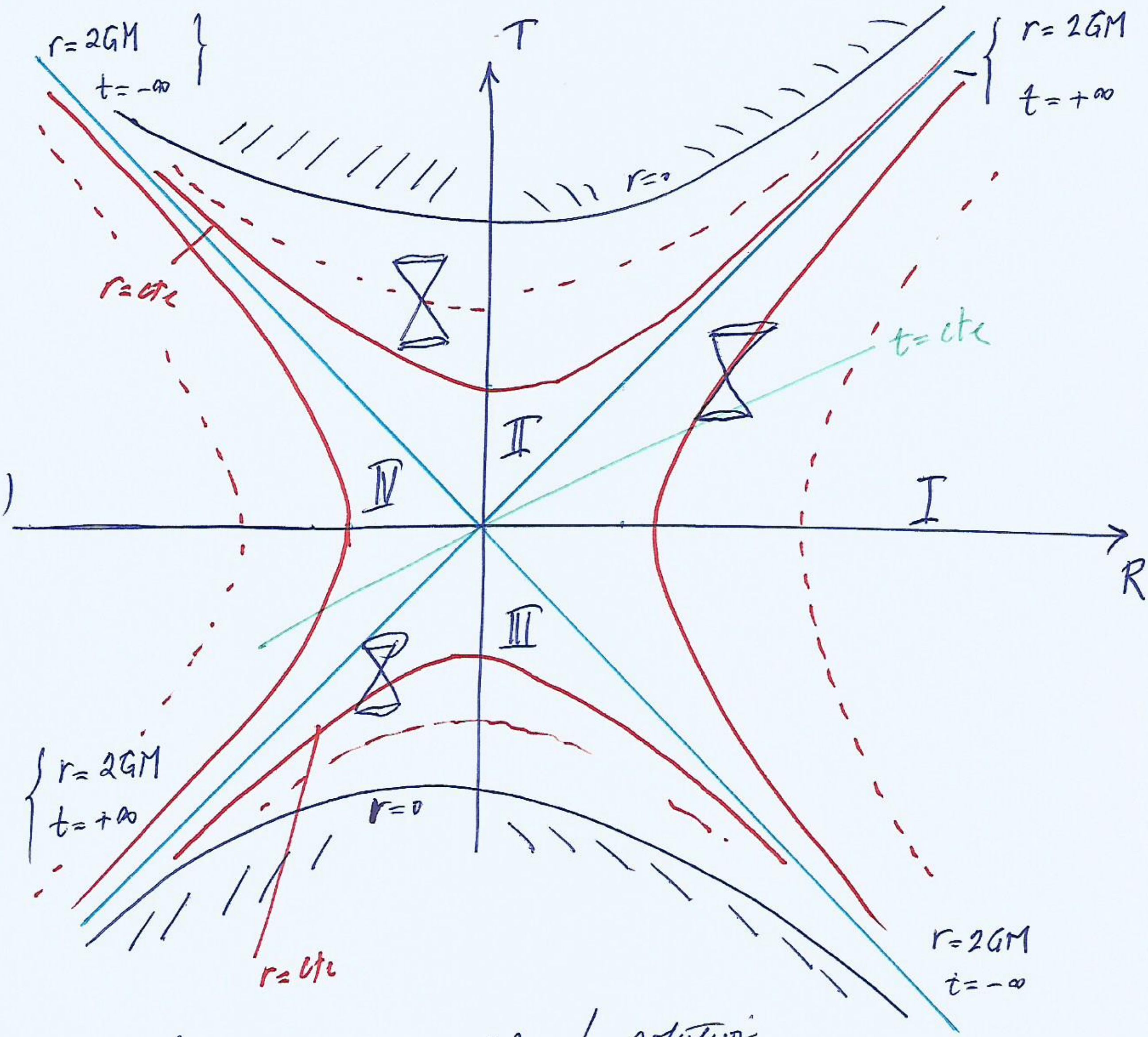
ناحیه قابل قبول فضا-زمان در مختصه کروسکال

(13) $$\begin{cases} -\infty < R < +\infty \\ T^2 < R^2 + 1 \end{cases}$$

حال می توانیم نمودار کروسکال Kruskal diagram همانند شکل ۲ را رسم کنیم.

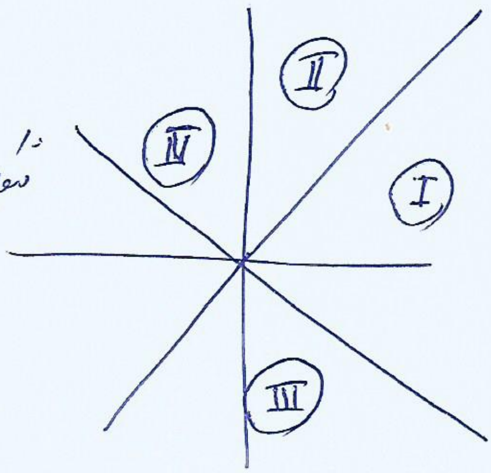
هر نقطه از نمودار کروسکال یک S_2 است. نمودار ۲ گستردگی فضا-زمان شوارتزشیلد را نشان می دهد.

(شکل 2)



Entire manifold of Schwarzschild solution.

شکل 3



شوارتزشیلد اصلی که از آن داستان را شروع کردیم در ناحیه I توصیف می شود.

(I) $r > 2GM$

اگر از پس مخروط‌های نوری آینده را نگاه کنیم به ناحیه II می‌رسیم و اگر مخروط نوری گذشته را دنبال کنیم به ناحیه III می‌رسیم. و در صورتی که این ژئودزی‌های فضاگونه را دنبال کنیم به ناحیه IV می‌رسیم.

تعاریف ارتباط بین (R,T) و (t,r) در ناحیه I کار می‌کنند برای سایر نواحی باید علامت منفی مناسب را در نظر بگیریم.

ناحیه II سیاهچاله است. اگر از ناحیه I به ناحیه II بروید، نخواهید توانست به دنیای خارج برگردید. در تمام مسیرهای آینده شما را به $r=0$ خواهد رساند.

ورود به ناحیه II، در حقیقت در کنار این که برگشت به ناحیه I امکان‌پذیر نیست و دوم این که حتماً به سمت $r=0$ خواهید رفت. جالب این است که در ترکیب اولیه

$$ds^2 = -\underbrace{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)}_{\text{positive}} dt^2 + \underbrace{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}}_{\text{negative}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (14)$$

$r < 2GM$

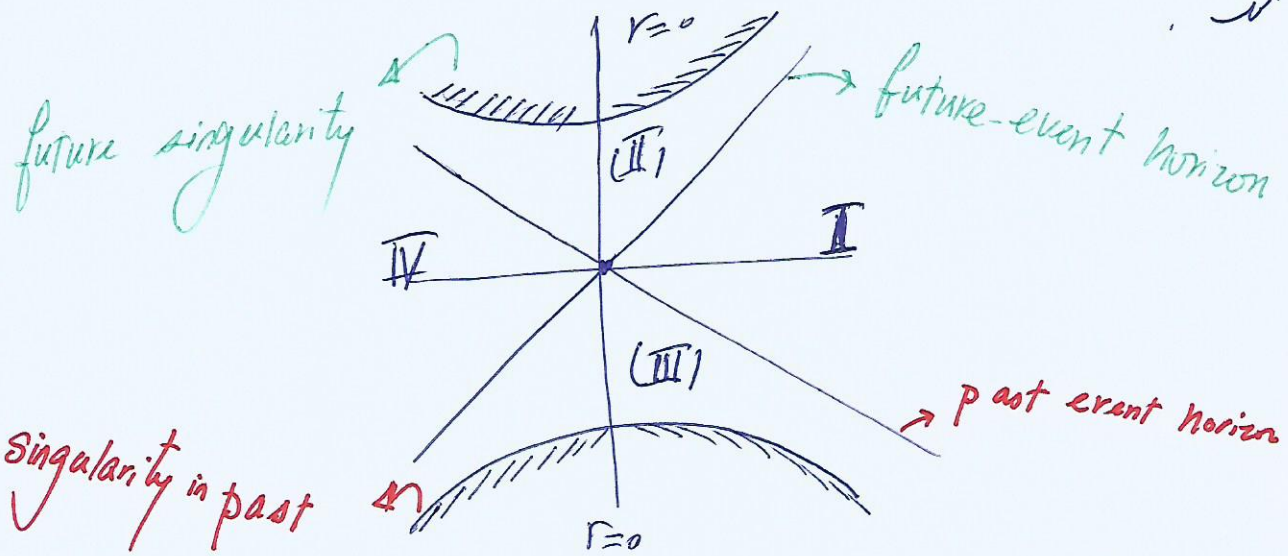
$\underbrace{}_{\text{space-like}}$ $\qquad$ $\underbrace{}_{\text{time-like}}$

پس در داخل سیاهچاله هیچ راهی جز برخورد با تکینگی ندارید. به همان شکلی که در ناحیه (I) هیچ راهی جز پیر شدن ندارید. طولانی‌ترین زمان برای زندگی در سیاهچاله برابر ژئودزی است در نتیجه هرچه در سیاهچاله زنده خواهید ماند این تعداد می‌کنید!

در نتیجه گریزی از تکینگی نیست. ولی نیروهای شدیدی tidal force فضانورد را از بین خواهد برد.

ناحیه III - time revers ناحیه II است. ناحیه‌ای از فضا-زمان که ذرات می‌توانند به سمت ما بیایند ولی ما هیچ وقت نمی‌توانیم وارد آن شویم. این ناحیه سفید چاله است.

white hole



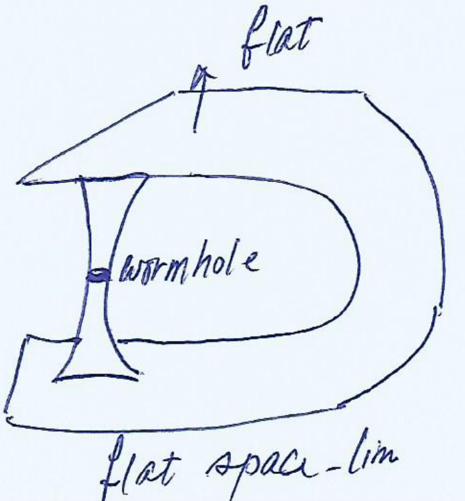
IV ناحیه ۴ کاملا از ما جدا است، مانند فضای ما با ویژگی مجانبی تخت، اینجا نه سیاهچاله و نه سفید چاله.

A mirror image of us.

ارتباط بین ناحیه I و IV می‌تواند از طریق کرم چاله ، worm-hole

Einstein-Rosen Bridge

اتفاق بیافتد!



(شکل ۹)