نسبیت عام . نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۸/۹۹   ۲۰ اردیبهشت ۱۳۹۹

سیاهچاله شوارتزشیلد Schwarzschild Black Holes !

تاکنون درباره حرکت ذرات در خارج سیاهچاله با شعاع $r = 2GM$ که مورد علاقه بسیاری از اجرام اخترفیزیکی است بحث کرده‌ایم. حال به بررسی اجسام در شعاع کوچکتر از $2GM$ می‌پردازیم.

یکی از راه‌های شناخت هندسه یک فضا، بررسی خواص علّی آن است.

EXPLORE THE CAUSAL STRUCTURE OF SPACE-TIME

این بررسی با استفاده از مخروط‌های نوری light cone انجام می‌شود. برای این بررسی منحنی‌های شعاعی null را در نظر می‌گیریم. (به بیان دیگر θ ، ϕ را ثابت در نظر می‌گیریم.)

$$(1) \qquad ds^2 = 0 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 ,$$

Null structure

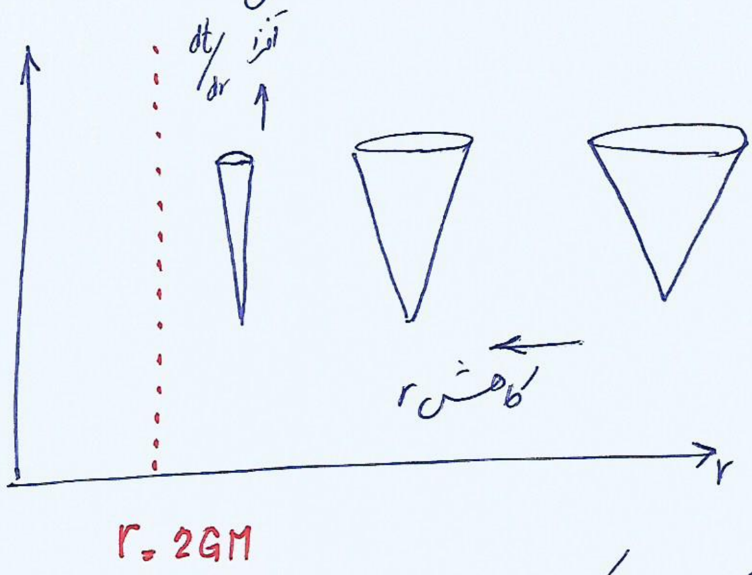
که از رابطه فوق داریم.

$$(2) \qquad \frac{dt}{dr} = \pm\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}$$

رابطه فوق شیب مخروط‌های نوری را در صفحه $(t-r)$ مشخص می‌کند. در فواصل r بزرگ شیب مخروط نوری به سمت ± 1 میل می‌کند این همان حالت فضای تخت مینکوفسکی است.

هر چقدر به سمت $r \to 2GM$ حرکت می‌کنیم، مخروط نوری بسته‌تر می‌شود. تا شیب $\frac{dt}{dr} \to \pm\infty$ میل می‌کند.

(شکل 1)

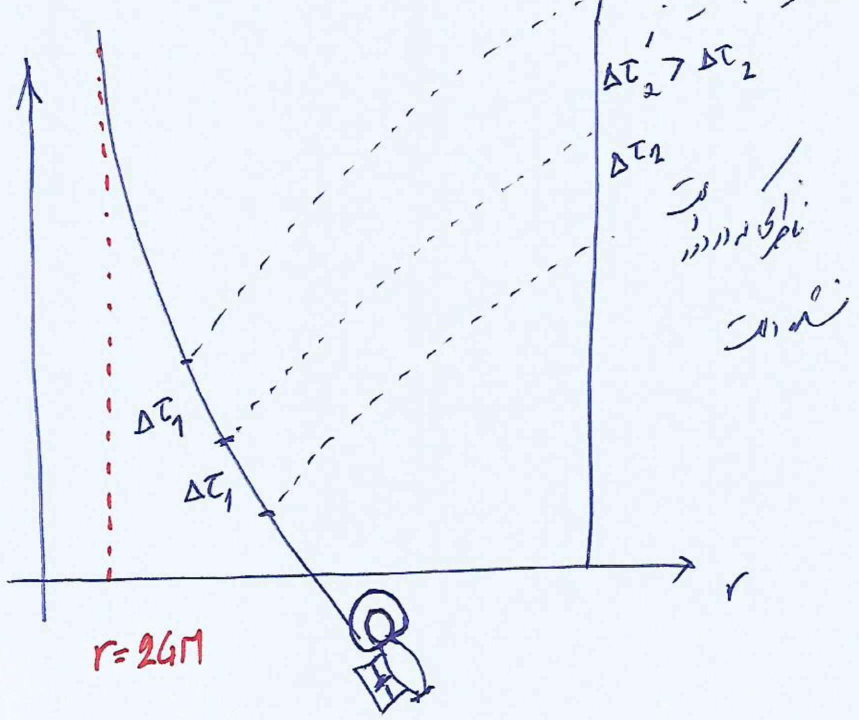


پس بدیهی است که در دستگاه مختصات حاضر، نور به شعاع $r=2GM$ نمی‌رسد! (شبیه مجانب‌ها) به آن میل می‌کند.

البته در ادامه خواهیم دید که عدم توانایی رسیدن به شعاع شوارتزشیلد توهمی بیش نیست "Illusion" و پرتو نور یا یک موجود جرم‌دار توانایی رسیدن و عبور از $r=2GM$ را دارد.

البته تعبیر این داستان این است که ناظری که در بی‌نهایت قرار دارد پرتو نورهای ارسال شده از یک فضانورد را که در حال سقوط به سیاه‌چاله است را در بازه‌های زمانی بزرگ و بزرگتر دریافت می‌کند. به شکل زیر توجه کنید.

(شکل 2)



سیگنال‌ها در بازه زمانی ثابت $\Delta\tau_1$ ارسال می‌شوند و در بازه‌های Δt_2 که هر بار بزرگتر می‌شود را دریافت می‌کنیم. از این رو هیچ وقت مشاهده نخواهیم کرد که فضانورد $r=2GM$ را رد کرده باشد.

در نتیجه تصویر freeze شده و طول موج سرخ و سرخ‌تر می‌شود.

- عدم مشاهده عبور فضانورد از $r=2GM$ معنای واقعی دارد.

حال برای بررسی بیشتر این مسئله، سوال مستقل از دستگاه مختصات باید بپرسیم یعنی اینکه در زمان همراه آیا فضانورد $r=2GM$ را رد می‌کند؟

پاسخ: برای پاسخ به این سوال باید دستگاه مختصاتی را انتخاب کنیم که مستقل از مسئله بی‌نهایت شدن $r=2GM$ باشد. در ادامه این تبدیل مختصات را بررسی می‌کنیم.

هدف دستگاه مختصات جدید حل مشکل کند شدن مختصه r با افزایش t است.

$$t = \pm r^* + \text{constant} \qquad (3)$$

مختصه r^* - "tortoise coordinate" به صورت زیر است.

$$r^* = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \qquad (4)$$

این مختصه در $r \geq 2GM$ کار خواهد کرد. در این بازه تعریف به صورت زیر خواهد بود.

$$dr^* = dr + \frac{(2GM)\frac{dr}{2GM}}{\frac{r}{2GM} - 1} = dr\left(1 + \frac{1}{\frac{r}{2GM} - 1}\right) = \frac{dr\,\frac{r}{2GM}}{\frac{r}{2GM} - 1} \qquad (5)$$

4,

(6) $$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}\frac{dr^{*2}}{\left(\frac{r}{2GM}\right)^2}\left(\frac{r}{2GM}-1\right)^2 + r^2 d\Omega^2$$

در نتیجه

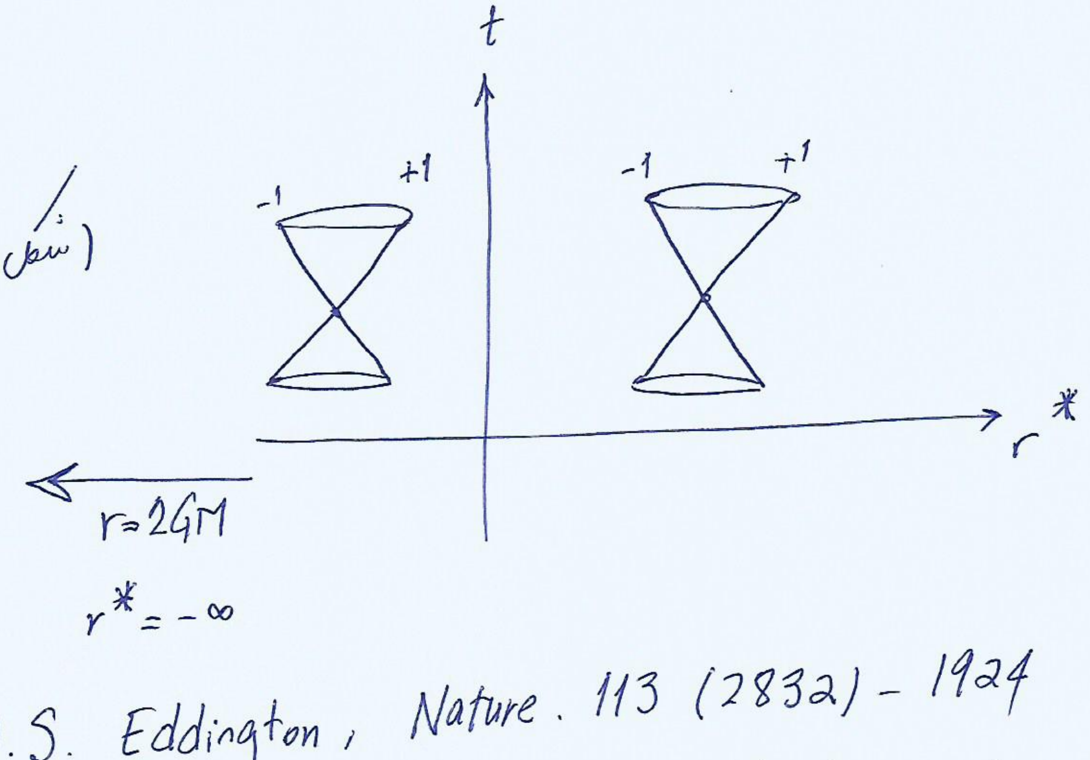
(7)
$$\begin{cases} ds^2 = \left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left(-dt^2 + dr^{*2}\right) + r^2 d\Omega^2 \\ \text{Note} \quad dr^* = \dfrac{dr}{1-\frac{2GM}{r}} \end{cases}$$

که r^* تابعی از r است . افق جایی افتاده است . مخروط های نوری شیب 1 دارند ولی از سطح $r=2GM$ به سمت $-\infty$ برده شده است .

(8) $$r \to 2GM \overset{\text{means}}{\Longrightarrow} r_* \to -\infty$$

از این رو نمودار $(t-r^*)$ به صورت زیر است .

(شکل 3)



A.S. Eddington, Nature. 113 (2832) - 1924
" A Comparison of whiteheads' & Einstein's Formula "

David Finkelstein, Phys. Rev. 110: 965-967, (1958)
" Past-Future Asymmetry of Gravitation field of Point-Particle ".

Achilles and a tortoise, Zeno of Elea (495-430 B.C.)

قدم بعدی آن است که دستگاه مختصات را منطبق بر مخروط نوری داشته باشیم.

Adapted to the null geodesics.

$$\text{(9)}\qquad \begin{cases} v = t + r^* \\ u = t - r^* \end{cases}$$

با این تعریف

$$\text{(10)}\qquad \begin{array}{ll} v = cte & \text{"infalling" radial null geodesic} \\ u = cte & \text{"outgoing" radial null geodesic} \end{array}$$

حال از (t, r^*) به مختصه (r, v) می‌رویم.

$$\text{(11)}\qquad dv = dt + dr^*$$

$$-dt^2 = -dv^2 - dr^{*2} + dv\,dr^* + dr^*\,dv$$

حال با جایگذاری با مختصه مستقیم tortoise در ترکیب شوارتزشیلد خواهیم داشت.

b/

(12) $$ds^2 = \left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left[-dv^2 - \cancel{dr^{*2}} + dv\,dr^* + dr^*\,dv + \cancel{dr^{*2}}\right] + r^2\,d\Omega^2$$

درنتیجه

(13) $$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dv^2 + \left[\underbrace{dv\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dr^*}_{dr} + \underbrace{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dr^*\,dv}_{dr}\right] + r^2\,d\Omega^2$$

بدین ترتیب مختصات Eddington-Finkelstein ادینگتن فینکلشتین به دست می‌آید

(14) $$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dv^2 + \left(dv\,dr + dr\,dv\right) + r^2\,d\Omega^2$$

پیشرفت نمود داشته‌ایم، بی‌نهایت شدن ترکیب برطرف شده است، دترمینان متریک نیز $g = -r^4\sin^2\theta$ است. پس در $r=2GM$ مشکلی نداریم.

در مختصات E-F شرط تهی بودن شعاعی به صورت زیر است.

(15) $ds = 0$ $\quad d\Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = dv\left[-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dv + 2\,dr\right]$

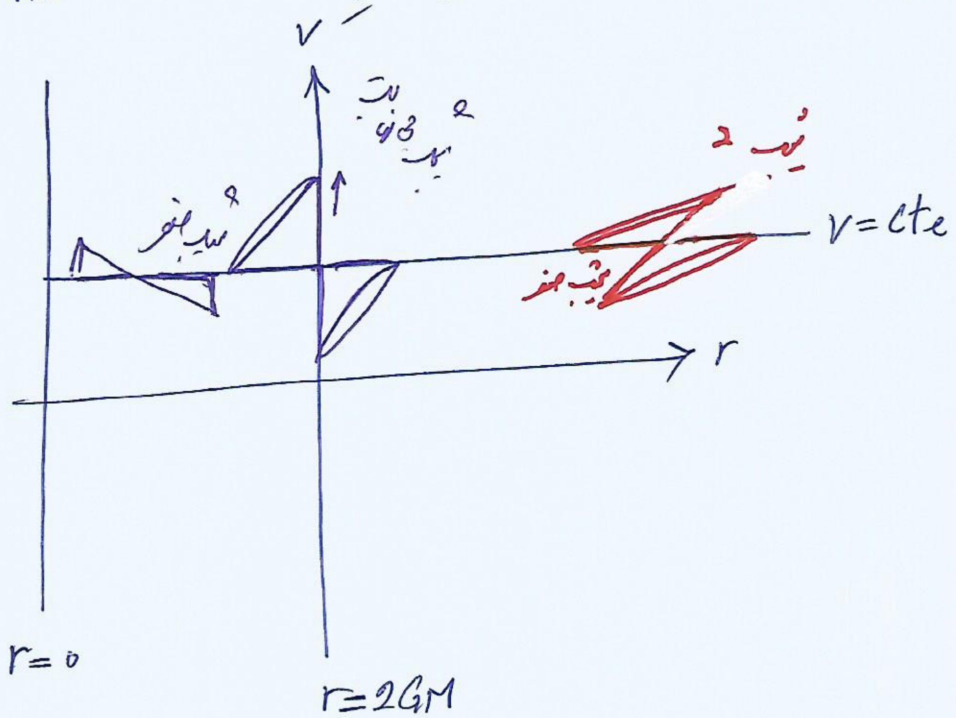
Null geodesic $\qquad$ radial

در نتیجه خواهیم داشت:

$$(16) \qquad \frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & \text{infalling} \\ 2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} & \text{outgoing.} \end{cases}$$

حال اتفاق جالبی رخ می‌دهد. $r = 2GM$ دچار مشکل نیست و در بی‌نهایت نیز قرار ندارد بلکه ساختار مخروط نوری عوض می‌شود. به بیان دیگر

"light cones tilt-over"



(شکل 4

- در ناحیه $r < 2GM$ تمام مسیرها اشاره در جهت کاهش r هستند!

از صفحه $r = 2GM$، اگرچه به صورت موضعی خوب رفتار می‌کند، بلکه به صورت کلی صفحه بدون برگشت است،

"globally function of no return".

اگر یک ذره از درون $r = 2GM$ عبور کند امکان برگشت ندارد!

در نتیجه افق رویداد EVENT HORIZON را ابر صفحه‌ای تعریف می‌کنیم که اگر ذره‌ای از آن گذشت ارتباطش با بی‌نهایت قطع می‌شود. در شوارتزشیلد افق در $r = 2GM$ قرار دارد. در ادامه این تعریف را دقیق و دقیق‌تر خواهیم کرد.

نکته جالب توجه این است که افق اگرچه در $r = 2GM$ در موقعیت مشخصی قرار دارد ولی یک ابر سطح نورگونه است. از این رو به ساختار علی فضا-زمان ربط دارد.

سیاهچاله Black-Hole ناحیه‌ای از فضا-زمان است که توسط افق رویداد از بی‌نهایت قطع ارتباط شده است.

نکته مهم دیگر این است که افق رویداد یک مفهوم global است و با بررسی موضعی هندسه را به دست نمی‌آید. این ایده در فضا-زمان های پیچیده‌تر نیز وجود دارد.

⚠ این تصور که سیاهچاله اجسام را به سمت خود می‌کشد لزوماً صحیح نیست. خارج شعاع شوارتزشیلد هندسه فضا-زمان شبیه هندسه اطراف خورشید است!

⚠ نکته بعدی در مورد این سرعت فرار در مکانیک کلاسیک است

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

برابر قرار دادن این سرعت با نور، شعاع شوارتزشیلد را می‌دهد ولی این تشابه داستان عمیقی را همراه خود ندارد.

- اولین بار ایده سیاه‌چاله در سال 1784 توسط منجم انگلیسی John Michell مطرح شد، به عنوان جسم با جرم زیاد که نور توانایی فرار از آن را ندارد.

- 1915 نسبیت عام

- چند ماه بعد کارل شوارتزشیلد راه حل خودش را پیدا می‌کند.

- Johannes Droste شاگرد لورنتس در این حدود پژوهش انجام می‌دهد. (در همین سال)

- 1924 - ادینگتون ایده تغییر مختصات

- 1933 - Georges Lemaitre، تکینگی غیرفیزیکی (مختصات)

- 1931 Subrahmanyan Chandrasekhar، جرم غیرچرخشی با تبهگنی الکترونی در جرم‌های بالاتر از حد چاندراسخار $1.4M_\odot$ قادر به مقابله با ریزش گرانشی نیست
White Dwarf (مخالفت ادینگتون و لو لاندائو)

- 1939 Robert Oppenheimer، پیش‌بینی ستاره‌های نوترونی رد
Tolman-Oppenheimer-Volkoff اجازه ریزش را نمی‌دهد. Neutron Star
Pauli Exclusion Principle $1.5\,M_\odot$ to $3.0\,M_\odot$

- GW170817 NS-NS → black hole
TOV limit $\sim 2.17\,M_\odot$

- 1958 ، دیوید فینکلشتاین David Finkelstein ، افق رویداد را توصیف می‌کند.
- Martin Kruskal (1960) Physical Review 119(5)
  Maximal extension of Schwarzschild BH
- 1967 ، Jocelyn Bell Burnell کشف پالسارها
- 1969 ستاره نوترونی، سیاهچاله (و نه یک جسم اخترفیزیکی مجرد)
- 1963 Roy Kerr ، حل دقیق سیاهچاله چرخان
- 1965 Ezra Newman ، راه حل سیاهچاله چرخان و با بار الکتریکی
- David Robinson 1975 ، Brandon Cartar 1977 ، 1971 ، Werner Israel 1967
  نظریه بی‌موی سیاهچاله‌ها No hair theorem
- تکینگی
  Evgeny Lifshitz, Isaak Khalatnikov, Vladmir Belinsky
- 1965 Roger Penrose نظریه تکینگی‌ها
  Stephen Hawking
- ترمودینامیک سیاهچاله‌ها 1970s
  James Bardeen, Jacob Bekenstein
  Carter, Hawking

- 1974 تابش جسم سیاه سیاهچاله‌ها S. Hawking
  Quantum field Theory in Curved Space-Time
- 2015 - امواج گرانشی از برخورد دو سیاهچاله

* ترم سیاهچاله Robert H. Dicke

Black hole of Culcutta

life & Science News magazine 1963

lecture by John Wheeler (1967) Coined the term by student adapted.

John Wheeler (1911-2008)
Alma mater: John-Hopkins
Institute: Princeton

Students

Jacob Bekenstein	Bahram Mashhoon	Bill Unruh
Hugh Everett	Charles Misner	Robert Wald
Richard Feyman	Kip Thorne	Demetrios Christodoulou

پایان درس