□ پیمانه TT "transverse - traceless gauge"

رابطه‌ای که در جلسه پیش برای نظریه اختلال خطی به دست آوردیم

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (1)$$

برای بررسی امواج گرانشی و اثرات آن در روی آشکارسازی به جواب‌های $T_{\mu\nu} = 0$ علاقمند هستیم

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad ; \quad \Box = -\frac{1}{c^2}\partial_0^2 + \nabla^2 \qquad (2)$$

این رابطه نشان می‌دهد که امواج گرانشی با سرعت نور منتشر می‌شوند.

برای بررسی دقیق‌تر این جواب‌ها، باید توجه کنیم که پیمانه هارمونیک $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$، تمام درجه آزادی را استفاده نکرده است. در تبدیل

$$(3) \begin{cases} \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} \to (\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})' = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \Box \xi_\mu \\ x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \end{cases}$$

مجدداً می‌توان تبدیل $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ را با شرط $\Box \xi_\mu = 0$ استفاده کرد به طوری که $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ باقی بماند. از سوی دیگر می‌توان نشان داد که $\Box \xi_{\mu\nu} = 0$ با تعریفی که از $\xi_{\mu\nu}$ داریم.

$$\xi_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho \xi^\rho \qquad (4)$$

زیرا $\Box$ و ∂_μ در فضا-زمان تخت جابه‌جا می‌شوند.

این بدین معناست که از $\bar{h}_{\mu\nu}$ می‌توانیم $\xi_{\mu\nu}$ را کسر کنیم با توجه به اینکه $\Box \bar{h}_{\mu\nu} = 0$

$\xi_{\mu\nu}$ به ۴ تابع مستقل ξ_μ ربط دارد.

ξ^0 را می‌توانیم طوری انتخاب کنیم که $\bar{h} = 0$ که در این صورت $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$

۳ تابع باقی مانده $\xi^i(x)$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم $h^{0i}(x) = 0$. از آن جایی که

که $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ شرط لورنتس برابر خواهد بود با

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial^0 h_{00} + \partial^i h_{0i} = 0 \\ \text{از طرفی} \quad h_{0i} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \partial^0 h_{00} = 0$$

تابع ثابت در زمان

h_{00} بستگی به قسمت استاتیک ترکیب دارد (پتانسیل نیوتنی نه امواج گرانشی) است.

درنتیجه تمام شرایط $h_{\mu\nu}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$(6) \quad \boxed{ h^{0\mu} = 0 \qquad \underset{\text{Trace-free}}{h^i{}_i = 0} \qquad \underset{\text{Lorentz gauge}}{\partial^i h_{ij} = 0} }$$

به این پیمانه، پیمانه transverse-traceless gauge (TT gauge)

این بدین معناست که ۱۰ درجه آزادی با پیمانه لورنتس به ۶ درجه و با ξ^μ ۴ درجه

که در رابطه $\Box \xi_\mu = 0$ صدق می‌کند به ۲ درجه تقلیل می‌یابد.

تانسور در پیمانه traceless - transverse را با h_{ij}^{TT} نمایش می‌دهیم.

معادله $\Box \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ جواب موج تخت دارد.

$$h_{ij}^{TT}(x) = e_{ij}(\vec{k})\, e^{ikx} \tag{7}$$

که $K^{\mu} = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$ ، $\omega/c = |k|$. e_{ij} را تانسور قطبش گویند.

$\hat{n} \equiv \frac{\vec{K}}{|K|}$ جهت انتشار موج است. $\partial^{i} h_{ij} = 0$ نشان می‌دهد که مؤلفه‌های غیر صفر h_{ij}^{TT} در صفحه عمود بر $\hat{n}$ هستند.

$$h_{ij}^{TT}(t,z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \tag{8}$$

$$h_{ab}^{TT}(t,z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix}_{ab} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \tag{9}$$

که $a = b = 1, 2$ که اندیس‌ها در صفحه transverse هستند. $h_+ , h_\times$ را امواج گرانشی plus ، Cross می‌گویند.

این بدین معنا است که طول فضا-زمان به دلیل عبور امواج گرانشی به صورت زیر نوشته خواهد شد.

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dz^2 + \left\{1 + h_+ \cos\left[w\left(t - z/c\right)\right]\right\} dx^2 + \left\{1 - h_+ \cos\left[w\left(t - z/c\right)\right]\right\} dy^2 + 2h_\times \cos\left[w\left(t - z/c\right)\right] dx\,dy \tag{10}$$

رابطه بالا در پیمانه لورنتس است ولی در پیمانه TT ، برای تصویر این جواب در TT از تانسور Λ استفاده خواهیم کرد. ابتدا تانسور P_{ij} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P_{ij}(\hat{n}) = \delta_{ij} - n_i n_j \tag{11}$$

تانسور متقارن، transverse ، $n^i P_{ij}(\hat{n}) = 0$ است،

$$\begin{cases} P_{ik}P_{kj} = P_{ij} \\ P_{ii} = 2 \end{cases}$$

با استفاده از P_{ij} می‌توانیم تانسور Λ را به صورت زیر بسازیم.

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl} \tag{12}$$

که $\Lambda_{ij,kl}\Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn}$ ، نسبت به تمام اندیس‌ها transverse است

$$n^i \Lambda_{ij,kl} = 0 \qquad n^j \Lambda_{ij,kl} = 0 \tag{13}$$

نسبت به دو اندیس (اول و دوم) ، اندیس (سوم و چهارم) متقارن است.

$$\Lambda_{ii,kl} = \Lambda_{ij,kk} = 0 \tag{14}$$

نسبت به جابجایی دو اندیس $(k,l) \leftrightarrow (i,j)$ ، تانسور Λ تقارن دارد.

شکل صحیح تانسور Λ به صورت زیر است.

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} + \frac{1}{2} n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2} n_i n_j n_k n_l \tag{15}$$

تمرین ۲ سری ۲، می‌توان نشان داد که

$$\boxed{h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl}\, h_{kl}} \tag{16}$$

در پیمانه TT ، $h_{ij}^{TT}(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$h_{ij}^{TT}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(A_{ij}(k) e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})} + A_{ij}^{*}(k) e^{-ikx} \right) \tag{17}$$

که

$$d^3k = |k|^2 d|k|\, d\Omega$$

در نتیجه

$$= \left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 f^2 df\, d\Omega$$

$$h_{ij}^{TT}(x) = \frac{1}{c^3} \int_0^\infty df\, f^2 \int d^2\hat{n} \left(A_{ij}(f, \hat{n}) \times e^{-2\pi i f (t - \hat{n}\cdot\vec{x})/c} + c.c. \right) \tag{18}$$

$f > 0$ physical frequencies.

شرط TT ، برقرار خواهد بود با

(19) $$A^{i}_{\ i}(\vec{k})=0 \quad \& \quad K^{i}A_{ij}(\vec{k})=0$$

در صورتی که یک موج را از یک منبع مشخص در جهت $\hat{n}_0$ رصد کنیم A_{ij} به صورت زیر خواهد بود

(20) $$A_{ij}(\vec{k}) = A_{ij}(f)\,\delta^{(2)}(\hat{n}-\hat{n}_0)$$

a, b اندیس های صفحه عمود بر انتشار موج گرانشی است در نتیجه

(21) $$h_{ab}(t,\vec{x}) = \int_0^{+\infty} df\,\left(\tilde{h}_{ab}(f,\vec{x})e^{-2\pi i f t} + \tilde{h}^{*}_{ab}(f,\vec{x})e^{2\pi i f t}\right)$$

که

(22) $$\tilde{h}_{ab}(f,\vec{x}) = \frac{f^2}{c^3}\int d^2\hat{n}\, A_{ab}(f,\hat{n})\, e^{2\pi i f \hat{n}\cdot\vec{x}/c}$$

$$= \frac{f^2}{c^3} A_{ab}(f)\, e^{2\pi i f \hat{n}_0\cdot\vec{x}/c}$$

از آنجایی که اندازه آشکارسازها بسیار کوچکتر از طول موج امواج گرانشی $\bar{\lambda}_{gw} = \frac{\lambda}{2\pi}$ است در نتیجه $e^{i\hat{n}\cdot\vec{x}/\bar{\lambda}}$ را می توان صرف نظر کرد. به بیان دیگر امواج گرانشی رصد شده تابعی از x ندارد.

(23) $$h_{ab}(t) = \int_0^{\infty} df\,\left(\tilde{h}_{ab}(f)e^{-2\pi i f t} + \tilde{h}^{*}_{ab}(f)e^{2\pi i f t}\right)$$

که $$\tilde{h}_{ab}(f) = \tilde{h}_{ab}(f,\vec{x}=0)$$

با توجه به رابطه 8 خواهیم داشت:

$$h_{ab}^{TT}(t,z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix}_{ab} \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]$$

$$(24) \qquad \tilde{h}_{ab}(f) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_+(f) & \tilde{h}_\times(f) \\ \tilde{h}_\times(f) & -\tilde{h}_+(f) \end{pmatrix}$$

حال به تعریف تانسور قطبش می‌پردازیم.

$$(25) \qquad \begin{cases} e^+_{ij}(\hat{n}) = \hat{u}_i \hat{u}_j - \hat{v}_i \hat{v}_j \\ e^\times_{ij}(\hat{n}) = \hat{u}_i \hat{v}_j + \hat{v}_i \hat{u}_j \end{cases}$$

که $\hat{u}$، $\hat{v}$ بردار عمود بر جهت $\hat{n}$ هستند. با این تعریف بردارهای قطبش در رابطه زیر صدق می‌کند

$$(26) \qquad e^A_{ij}(\hat{n})\, e^{A'ij}(\hat{n}') = 2\delta^{AA'}$$

در دستگاه مختصاتی که $\hat{n}$ در جهت z است

در نتیجه $\hat{u} = x, \hat{v} = y$

$$(27) \qquad e^+_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{ab} \qquad e^\times_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{ab}$$

در مختصه دلخواه می‌توانیم تعریف کنیم:

$$(28) \qquad \frac{f^2}{c^3} A_{ij}(f,\hat{n}) = \sum_{A=+,\times} \tilde{h}_A(f,\hat{n})\, e^A_{ij}(\hat{n})$$

در نتیجه جواب زیر را خواهیم داشت

$$(29) \qquad l_{ab}(t,x) = \sum_{A=+,\times} \int_{-\infty}^{+\infty} df \int d^2\hat{n}\, \tilde{h}_A(f,\hat{n})\, e^{A}_{ab}(\hat{n}) \times e^{-2\pi i f \left(t - \hat{n}\cdot\vec{x}/c\right)}$$

که چون تعریف کردیم $\tilde{h}_A(-f,\hat{n}) = \tilde{h}^*_A(f,\hat{n})$ است.

در درس نامه بعد اثر امواج گرانشی بر روی بازوها را بررسی خواهیم کرد.