خمینه‌ها "Manifolds"

خمینه‌ها (خمینه‌های مشتق‌پذیر differentiable manifolds.) یکی از مهم‌ترین مفاهیم بنیادی در فیزیک و ریاضی است.

در تاریخ علم، کار با $\mathbb{R}$ یکی از مهم‌ترین داستان‌های پیشرفت علم است از تعریف مشتق‌گیری، انتگرال‌گیری و...

البته فضاهای پیچیده‌تری (مانند کره) وجود دارد که موضوع هندسه و ریاضیات مدرن بوده است.

خمینه‌ها به عنوان ایده هندسه فضاهای پیچیده که دارای خمش و یا توپولوژی topology باشند تعریف شده است که به صورت موضعی همانند $\mathbb{R}^n$ رفتار می‌کند.

همانند بودن به این معنا که نه تنها مشترک شبیه $\mathbb{R}^n$ است بلکه رفتار موجودات هندسی و بردارها...

خمینه از به هم وصل کردن هموار این ناحیه‌های $\mathbb{R}^n$ به دست می‌آید.

نکته مهم این است که هر نقطه از خمینه شبیه $\mathbb{R}^n$ است و بعد آن n می‌باشد که خمینه هم همان بعد را دارد.

نمونه از خمینه‌ها عبارتند از:

1) $\mathbb{R}^n$ خود خمینه است. زیرا هر نقطه از آن شبیه $\mathbb{R}^n$ است.

2) کره S^n که. این موجودات هندسی را می‌توان به صورت مکان هندسی نقاطی که از مرکز به یک فاصله در $\mathbb{R}^{n+1}$ تعریف کرد. S^1 دایره و S^2 که به عنوان یک خمینه دوبعدی

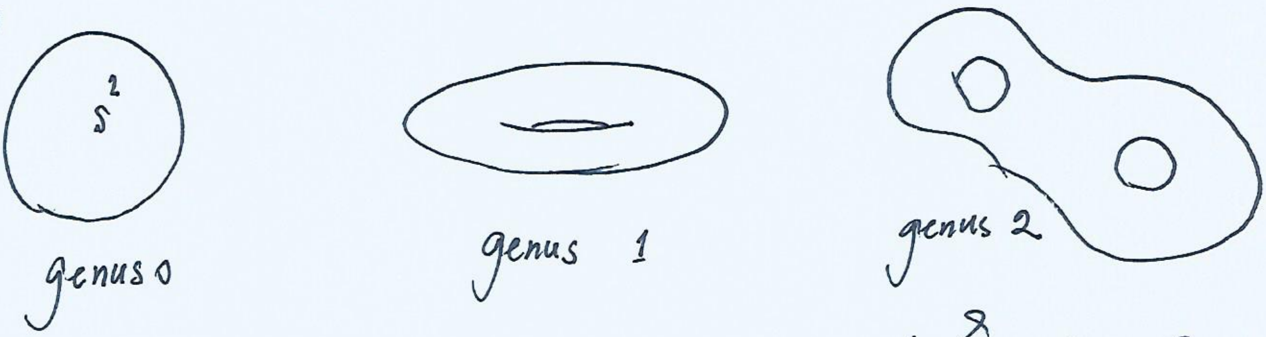
2,

شناخته شده است. نکته مهم در اینجا این است که تعریف خمینه فقط به خودی خود قابل انجام است و احتیاجی به $\mathbb{R}^{n+1}$ برای خمینه‌ها نیست. این خطوط فقط در جهت تجسم فضایی است. (شکل 1)

3) T^n یا n-چنبره (n-torus) نمونه دیگری از خمینه‌ها هستند

4) سطح ریمانی با g-genus یک چنبره ۲-بعدی با g حفره است. شکل زیر نمونه‌ای از چنبره‌ها را با genus متفاوت نشان می‌دهد.

(شکل 2)



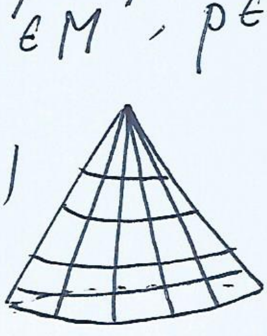
توجه داشته باشید که هر خمینه ۲-بعدی Compact orientable boundaryless یک سطح ریمانی با یک genus است.

5) تبدیلات پیوسته مانند دوران در R^n یک خمینه را می‌سازند. گروه‌های لی Lie groups خمینه‌هایی هستند که ساختار گروه را دارند. به طور مثال دوران‌ها در 2 بعد، $SO(2)$، خمینه S^1 هستند.

6) ضرب مستقیم direct product دو خمینه، خمینه است. این بدین معنا است که دو خمینه M، M' با بعد n و n'، خمینه‌ای را ایجاد می‌کنند $M \times M'$ که دارای بعد $n+n'$ است مجموعه‌ای از اعضای (p, p') ساخته شده است که $p \in M$، $p' \in M'$

سؤال این است که چه موجودات هندسی خمینه نیستند. مخروط خمینه نیست چون راس آن شبیه R^n نیست.

(شکل 3)



در شکل مخروط مشتق‌پذیری خمینه در رأس مخروط خود را نشان می‌دهد.

در ادامه می‌خواهیم تعریف دقیق‌تری از شبیه $\mathbb{R}^n$ در هر نقطه، چسباندن قسمت‌های متفاوت خمینه با یکدیگر را ارائه دهیم.

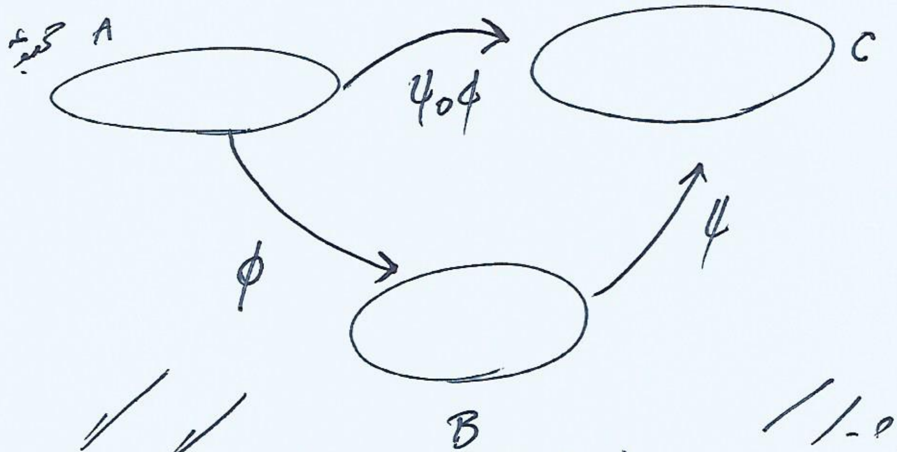
فرض کنید دو مجموعه M و N را داشته باشیم که با یک نگاشت map به اسم ϕ این دو مجموعه را به یکدیگر وصل می‌کند $\phi: M \to N$ بدین معنا که هر عضو از M یک عضو از N را مشخص می‌کند.

ترکیب دو نگاشت composition را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

(1) $\phi: A \to B$ ، $\psi: B \to C$ ، $\psi \circ \phi: A \to C$ ، که $\psi \circ \phi(a) = \psi(\phi(a))$

توجه داشته باشید که $a \in A$ ، $\phi(a) \in B$ ، $(\psi \circ \phi)(a) \in C$!

باید توجه داشته باشیم که ترتیب نگاشت‌ها مهم است و همواره از سمت راست اعمال می‌شود.



(شکل ۴)

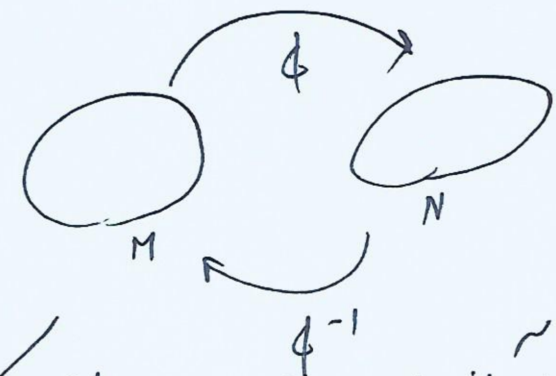
ψ را نگاشت یک به یک one-to-one (injective) گویند اگر هر عضو از N حداکثر یک عضو M به آن نگاشت شده است. ϕ را نگاشت پوشا onto (surjective) گویند. بدین معنا که هر عضو N حداقل یک عضو از M را داشته باشد.

4,

مجموعه M را دامنه domain گویند. مجموعه نقاطی از N که نگاشت ϕ نقطه‌ای به آن می‌برد را برد image گویند. به زیرمجموعه‌ای از N ، $U \subset N$ توجه کنید. به مجموعه‌ای از M که نگاشت ϕ آن‌ها را به U برده است preimage $\phi^{-1}(U)$ گویند.

به نگاشتی که یک به یک و پوشا باشد، تبدیل برگشت‌پذیر invertible (bijective) گویند.
حال می‌توانیم نگاشت معکوس inverse map را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$\phi^{-1} : N \to M \qquad (\phi^{-1} \circ \phi)(a) = a \tag{2}$$



شکل ۵)

مفهوم پیوستگی و مشتق‌پذیری بسیار شبیه آن چیزی است که در حساب معمولی تعریف کردیم. در این راستا نگاشت $\phi : R^m \to R^n$ که یک مجموعه m تایی $(x^1, x^2, \dots, x^m)$ به یک مجموعه $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ می‌برد که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} y^1 &= \phi^1(x^1, x^2, \dots, x^m) \\ y^2 &= \phi^2(x^1, x^2, \dots, x^m) \\ &\vdots \\ y^n &= \phi^n(x^1, x^2, \dots, x^m) \end{aligned} \tag{3}$$

هر کدام از این توابع را C^p می‌نامیم اگر تا مرتبه p مشتق‌پذیر باشد. اگر کل توابع مشتق‌پذیر باشد $\phi : R^m \to R^n$ را C^p گوییم. C^∞ یعنی مشتق‌پذیری و پیوستگی تا هر مرتبه دلخواه است

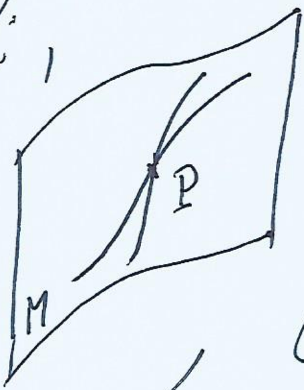
دو مجموعه M , N را diffeomorphic می‌گوییم اگر نگاشت C^∞ ، $\phi: M \to N$ و معکوس آن $\phi^{-1}: N \to M$ وجود داشته باشد. آنگاه نگاشت ϕ را همواریخت diffeomorphism گویند.

این معتبرترین توصیفی است که نشان دهیم که دو فضا به عنوان خمینه یکی‌اند. اگر می‌گوییم دو خمینه $SO(2)$ ، S^1 یکی‌اند به معنی diffeomorphic بودن است.

حال در این بستر می‌خواهیم بردارها را مجدد توصیف کنیم.

فرض کنید که می‌خواهیم در نقطه P بر روی خمینه M فضای تانژانت را درست کنیم. و این کار را بدون مختصات و با توجه به ویژگی‌های ذاتی خمینه درست کنیم.

(شکل 2)



حال برای شروع از ایده بردار مماس "tangent vector" خم‌ها شروع می‌کنیم. تمام خم‌هایی که از نقطه P می‌گذرند مجموعه نگاشت‌های غیرچندگانه nondegenerate است $\gamma: R \to M$ که P نقطه‌ی γ است.

image

در یک دستگاه مختصات خاص x^μ، هر خمی که از P می‌گذرد n عدد حقیقی را مشخص می‌کند $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ که λ پارامتر پیمایش خم است. ولی نکته این جاست که این n عدد بستگی به دستگاه مختصات دارد و ما برای توصیف فضای T_p یک توصیف مستقل از مختصات نیاز داریم.

برای این ایده فضای توابع هموار روی خمینه M را به اسم F تعریف می‌کنیم.

(4) $f: M \to R$, f توابع C^∞ نگاشت

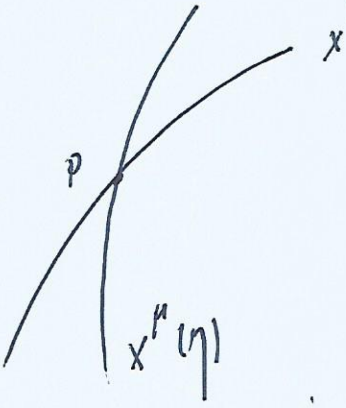
حال جالب است که هر خم که از نقطه P می‌گذرد یک اپراتور را در فضا مشخص می‌کند (اپراتور مشتق جهت‌گیر) که

(5) $$f \to \frac{d}{d\lambda} f \Big|_P$$ در نقطه P

حال ادعا می‌کنیم که فضای تانژانت را با استفاده از مشتق‌های جهت‌گیر (اپراتورها) درست کرد. در این صورت باید نشان دهیم که مشتق‌های جهت‌گیر فضای برداری تشکیل می‌دهند و ابعاد آن به اندازه M است.

اثبات فضای برداری ساده است. فرض کنید که دو خم $x^\mu(\lambda)$ و $x^\mu(\eta)$ را داشته باشیم که از نقطه P می‌گذرند.

(شکل 7)



حال اپراتورهای مشتق‌گیر را می‌توان مقایسه کرده و باهم جمع کرد.

$$a \frac{d}{d\lambda} + b \frac{d}{d\eta}$$

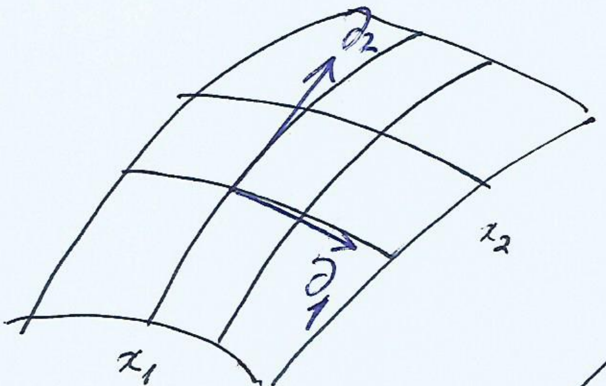
توجه داشته باشید λ و η پارامترهای پیمایش خم است. البته هنوز مشخص نیست که اپراتور جدید مشتق باشد. البته ویژگی خطی هم خطی بودن اپراتورها، تبعیت از قانون لایبنیتس است (Leibniz product rule) بدین ترتیب

(6)

$$\left(a \frac{d}{d\lambda} + b \frac{d}{d\eta}\right)(fg) = af\frac{dg}{d\lambda} + ag\frac{df}{d\lambda} + bf\frac{dg}{d\eta} + bg\frac{df}{d\eta}$$
$$= \left(a\frac{df}{d\lambda} + b\frac{df}{d\eta}\right)g + \left(a\frac{dg}{d\lambda} + b\frac{d}{d\eta}g\right)f$$

در نتیجه مجموعه عملگرهای مشتق گیر فضای برداری درست می کنند.

قدم بعدی این است که پایه های فضای تانژانت را مشخص کنیم. یک گزینه صحیح مشتقات جزئی $\{\partial_\mu\}$ هستند.



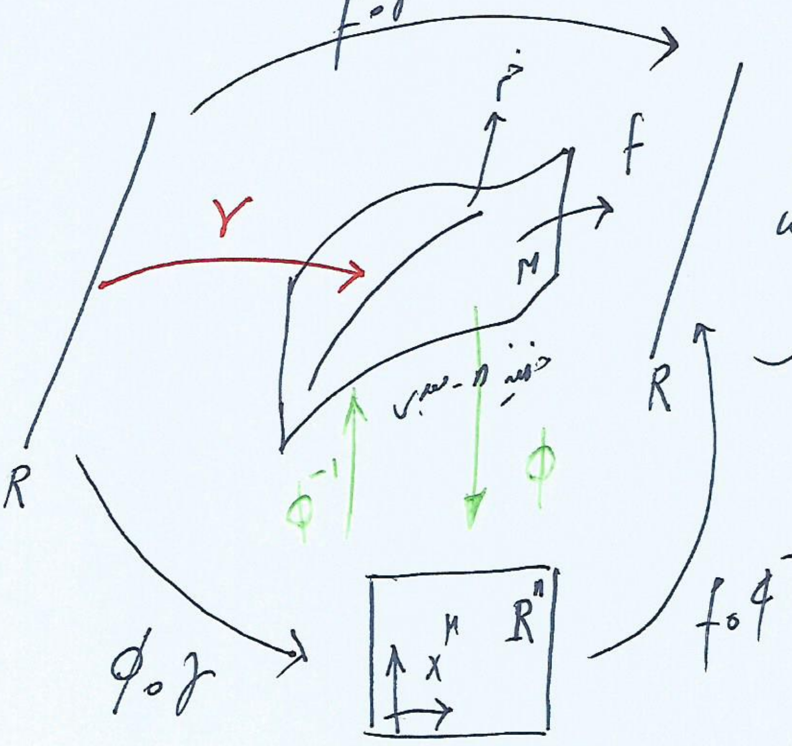
(شکل ۸)

مشتق جهت دار در راستای منحنی که $x^\nu = cte$ باشد به ازای $\nu \neq \mu$، مشتق ∂_μ تعریف می شود.

حال باید نشان دهیم که هر مشتق جهت دار به صورت جمع اعداد حقیقی در مشتقات جزئی نوشته می شود.

تصویر کلی: یک خمینه n-بعدی را در نظر بگیرید که دارای یک نگاشت (چارت مختصاتی) $\phi: M \to R^n$ یک منحنی $\gamma: R \to M$ است

و یک تابع $f: M \to R$ کل تصویر در شکل (۹) مشخص است:



γ: نگاشت تولید خم

ϕ: نگاشت چارت مختصاتی

f: تابع از خمینه به اعداد حقیقی

$f \circ \gamma$: نگاشتی که R را به R از طریق خم خمینه می برد.

$\phi \circ \gamma$: نگاشت R به R^n چارت مختصاتی، $f \circ \phi^{-1}$، R^n را به R می برد.

حال می‌خواهیم عملگر $\frac{d}{d\lambda}$ را برحسب مشتق‌های ∂_μ بیان کنیم

در نتیجه

$$(7) \quad \frac{d}{d\lambda} f = \frac{d}{d\lambda}(f\circ\gamma) = \frac{d}{d\lambda}\left[(f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\gamma)\right]$$

مشتق معمولی

$f\circ\gamma : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$= \frac{d(\phi\circ\gamma)^\mu}{d\lambda} \cdot \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x^\mu}$$

اندیس μ از فضای $\mathbb{R}^n$

in formal notation.

$$= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \, \partial_\mu f$$

از آن‌جایی که f دلخواه است $\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\partial_\mu$ و این بدین معنا است که $\{\partial_\mu\}$ پایه‌ها

مناسب برای فضای برداری است که از مشتق‌های جهت‌گیری درست شده است.

$\frac{d}{d\lambda}$ همان موجود هندسی است که به عنوان بردار مماس سطح است. در این صورت $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ بردار مماس مولفه‌های این موجود هندسی است. حال با این تفاوت که این مشتق در صفحه دلخواه تعریف شده است

و $\hat{e}_\mu = \partial_\mu$ بردارهای پایه است.

به این بردارهای پایه ∂_μ، پایه مختصاتی coordinate basis فضای T_p گویند.

در صفحه‌هایی که دارای خمش هستند بردارهای پایه شرط متعامد بهنجار orthonormal بودن را رعایت نمی‌کنند.

همواره می‌توانیم پایه‌های فضایی را تعریف کنیم که غیر مختصاتی باشند

یکی از فواید مهم استفاده از تعریف مجدد بردار، در فهم تبدیل مختصات است.
به طور مثال اگر یک بردار V را در دو دستگاه که داشته باشیم با استفاده از تبدیل مختصات خواهیم داشت

(8) $$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\,\partial_\nu$$

در نتیجه می‌توانیم قانون تبدیل مولفه‌های یک موجود هندسی را به دست آوریم

(9) $$\underbrace{V^\mu \partial_\mu = V'^\mu \partial'_\mu}_{\text{ناوردا بودن موجود هندسی}} = V'^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\,\partial_\nu$$

در ترم اول چون μ اندیس dummy است می‌توان آن را به ν تغییر دهیم

(10) $$V^\nu \partial_\nu = V'^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\,\partial_\nu$$

در نتیجه

(11) $$V^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V'^\mu \,, \qquad V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu$$

چون اصولاً بردارهای پایه در این تبدیل نوشته نمی‌شوند. رابطه 11 به عنوان قانون تبدیل مختصات بردار یا "vector transformation law" شناخته می‌شود.
جالب است که این تبدیل با تبدیل لورنتس در نسبیت خاص سازگار است
$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ زیرا تبدیل لورنتس نوع خاصی از تبدیل مختصات است.

البته تعریف (۱۱)، تعریف کلی‌تری است. باید توجه داشت که تبدیل مختصات، بردارهای پایه تانژانت نیز تغییر می‌کنند.

از آنجایی که بردارها به صورت مشتق جهت‌دار در هر نقطه از خمینه تعریف شدند. برای دو میدان برداری X و Y می‌توانیم جابه‌جاگر commutator $[X,Y]$ را بر اساس تأثیر آن بر تابع $f(x^\mu)$ تعریف کنیم.

$$(12) \qquad [X,Y](f) \equiv X(Y(f)) - Y(X(f))$$

نکته مهم این است که این عملگر مستقل از دستگاه مختصات است. $[X,Y]$ نیز خود یک میدان برداری است زیرا

$$(13) \qquad [X,Y](af+bg) = a[X,Y](f) + b[X,Y](g)$$

و قانون لایبنیتس Leibniz rule را رعایت می‌کند

$$(14) \qquad [X,Y](fg) = f[X,Y](g) + g[X,Y]f$$

که f و g تابع دلخواه روی خمینه و a، b اعداد ثابت باشد.

جالب این که مولفه $[X,Y]^\mu = X^\lambda \partial_\lambda Y^\mu - Y^\lambda \partial_\lambda X^\mu$ است.

این جابه‌جاگر همخوندی از مشتق لی Lie derivative است به این علت، براکت لی گفته می‌شود.

پایان درس.